חדו"א 1ב' - פתרון לתרגיל מספר 11

1. -

2. חשבו את האינטגרלים הבאים ע"י אינטגרציה בחלקים:

(א) $$\int x\cos(x)dx = \int xd(\sin(x)) = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x)$$

(ב) $$\int 2xe^{3x}dx = \frac{1}{3}\int 2xd(e^{3x}) = \tfrac{2x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int 2e^{3x}dx = \tfrac{2x}{3}e^{3x} - \tfrac{2}{9}e^{3x} = \tfrac{2}{9}e^{3x}(3x-1)$$

(ג) $$\int e^x\cos(x)dx = \int e^x d(\sin(x)) = e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)dx = e^x\sin(x) + \int e^x d(\cos(x)) =$$
$$= e^x\sin(x) + e^x\cos(x) - \int e^x\cos(x)dx$$
$$\Rightarrow \int e^x\cos(x)dx = \tfrac{e^x}{2}(\cos(x)+\sin(x))$$

3. חשבו את האינטגרלים הבאים ע"י החלפת משתנים נכונה:

(א) $$\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \begin{bmatrix} u = x^2/2 \\ du = xdx \end{bmatrix} = \int e^{-u}du = -e^{-u} = -e^{-x^2/2}$$

(ב) -

(ג) $$\int \cot x dx = \int \tfrac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \begin{bmatrix} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)dx \end{bmatrix} = \int \tfrac{1}{u}du = \ln|u| = \ln|\sin(x)|$$

(ד) -

4. מצא באינדוקציה ביטוי כללי ל: $I_n = \int x^n e^x dx$

$$I_n = \int x^n e^x dx = \int x^n d(e^x) = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}$$

$$I_0 = e^x \quad I_1 = e^x(x-1) \quad I_2 = e^x(x^2-2x+2) \quad I_3 = e^x(x^3-3x^2+6x-6) \quad I_4 = e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)$$

באופן כללי: $I_n = e^x(x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + ... + (-1)^{n-k}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} + ... + (-1)^n n!)$

5. יהיה $P(x)$ פולינום. הוכח ש: $\displaystyle\int P(x)e^x dx = Q(x)e^x + C$ כאשר $Q(x)$ פולינום מאותו דרגה של $P(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

נוכיח באינדוקציה על המעלה $n = \deg P$ של הפולינום P.

עבור $n = 0$, $P(x) = c$ ולכן: $\int P(x)e^x dx = c\int e^x dx = ce^x + C = Q(x)e^x + C$ ואכן $\deg Q = 0 = n$.

צעד האינדוקציה: נניח $P(x) = ax^n + S(x)$ פולינום ממעלה n כאשר S פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$.

ואז $\int P(x)e^x dx = \int ax^n e^x dx + \int S(x)e^x dx = ax^n e^n - \int(nx^{n-1} + S(x))e^x dx$

ולפי הנחת האינדוקציה: $\int(nx^{n-1} + S(x))e^x dx = \bar{Q}(x)e^x + \bar{C}$ כאשר $\deg \bar{Q} = \deg S$.

לכן: $\int P(x)e^x dx = ax^n e^n - \bar{Q}(x)e^x - \bar{C} = Q(x)e^x - \bar{C}$ כאשר $Q(x) = ax^n - \bar{Q}(x)$ פולינום ממעלה n.

6. השתמשנו באינטגרציה בחלקים ומצאו נוסחא רקורסיבית ל I_m במקרים הבאים:

(א) $$I_m = \int \tfrac{dx}{(x^2+a^2)^m} = \tfrac{x}{(x^2+a^2)^m} + \int \tfrac{2mx^2dx}{(x^2+a^2)^{m+1}} = \tfrac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2m\int \tfrac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}}dx - 2ma^2\int \tfrac{dx}{(x^2+a^2)^{m+1}}$$
$$I_m = \tfrac{x}{(x^2+a^2)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1}$$

לכן קבלנו: $I_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}((2m-1)I_m + \frac{x}{(x^2+a^2)^m})$ כאשר ידוע כי: $I_1 = \frac{1}{a}\arctan(x/a)$

(ב) $I_m = \int x^\alpha \ln^m x dx$ כאשר $\alpha \neq -1$.

$I_m = \int x^\alpha \ln^m x dx = \frac{1}{\alpha+1} \int \ln^m x d(x^{\alpha+1}) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln^m x - \int x^{\alpha+1} m \ln^{m-1} x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln^m x -$
mI_{m-1}

כאשר $I_0 = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$