

1. פתור את האינטגרלים ההבאים:

(א) -

(ב) נחלק פולינומים ונקבל: $x^5 + 2 = (x^2 - 1)(x^3 + x) + x + 2$ ואז נוכל לפתור בקלות את האינטגרל:

$$\int \frac{x^5 + 2}{x^2 - 1} dx = \int \left(\frac{x + 2}{x^2 - 1} \right) dx + \int (x^3 + x) dx$$

נעשה פירוק לשברים חלקיים:

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{3}{2} \frac{dx}{x - 1} - \int \frac{1}{2} \frac{dx}{x + 1}$$

(ג) נשים לב ש $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ ולכן נעשה פירוק לשברים חלקיים מהצורה:

$$\frac{x + 2}{(x - 1)^4} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} + \frac{D}{(x - 1)^4}$$

נקבל בסה"כ:

$$\int \frac{x + 2}{(x - 1)^4} dx = \int \frac{dx}{(x - 1)^3} + \int \frac{3dx}{(x - 1)^4}$$

2. פתור את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C \quad (\text{א})$$

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} dx = \int \frac{3 \sin u}{3 \cos u du} = 3 \int \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = 3 \int \frac{1 - \sin^2 u}{\sin u} du = \int \frac{du}{\sin u} + \int \sin u du \quad (\text{ב})$$

השני קל. לכן נותר רק לפתור את המחובר הראשון שקיבלנו:

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{du}{1 - \cos^2 u} = \int \frac{\cos u = x}{du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}} = \int \frac{dx}{1 - x^2}$$

אינטגרל זה נין לפתירה בקלות באמצעות שברים חלקיים.

(ג) -

(ד) -

$$\int \frac{x^4}{1 + x^2} dx = \int \frac{\sinh^4 u}{\cosh u} du = \int (\frac{e^u - e^{-u}}{2})^4 du = \dots \quad (\text{ה})$$

3. חשב את האינטגרלים:

$$\int \frac{2 \cos(x) + 4 \sin(x)}{\cos(x) + 1} dx = \int \frac{2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 4 \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \frac{2}{1+t^2} dt = \int 2(1 + t^2)(2 + 8t - 2t^2) dt \quad (\text{א})$$

$$\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = \int (1 - u^2)^2 du = \dots \quad (\text{ב})$$

$u = \cos x$
 $du = -\sin x dx$

(ג)

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \cos^2 x dx + \int \cos^4 x dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx + \int \left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right)^2 dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx$$

$$+ \int \frac{\cos^2 2x + 2 \cos 2x + 1}{2} dx = 2 \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx + \int \frac{dx}{2} + \frac{1}{2} \int (\frac{\cos 4x + 1}{2})$$