חדו"א 1ב' - פתרון לתרגיל מספר13

1. חשבו:

(א) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+x^3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x-1)dx}{x^2+1}$$

$\int_0^1 \frac{(x-1)dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{x^2+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = [\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$

לכן: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2+x^3} = [\frac{1}{2}\ln|x+1|]_0^1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}$

(ב) הפונקציה אי־זוגית ולכן: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)e^{\sin^2 x}dx = 0$

אפשר גם לעשות הצבה $\begin{bmatrix} u = \sin^2(x) \\ du = \sin(2x)dx \end{bmatrix}$ ולפתור באופן מפורש (שימו לב לבעיה בגבולות לאחר ההצבה).

2. חשב את השטח החסום בין:

(א) נבדוק מתי $e^x = e^{-x}$, כאשר $x=0$ לכן גבולות האינטגרציה הינם $x=0, x=1$:

$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x})dx = (e^x + e^{-x})_0^1 = e - 1 + e^{-1} - 1 = e + \frac{1}{e} - 2$

3. הוכח או הפרך:

(א) אם $|f|$ אינטגרבילית רימן אז f אינטגרבילית רימן.

לא נכון. למשל: $f(x) = 1$ כאשר $x \in \mathbb{Q}$, ו־ $f(x) = -1$ כאשר $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

אז f לא אינטגרבילית רימן באף קטע (בדומה לפונקציית דריכלה) למרות ש־ $|f| \equiv 1$ כן.

(ב) אם f אינטגרבילית ומתקיים $\int_a^b |f(x)|dx = 0$ אז $f(x) = 0$ לכל $x \in [a,b]$.

לא נכון. למשל: $f(x) = 0$ עבור $x \neq 0$, ו־ $f(0) = 17$. אז f אינטגרבילית בקטע $[-1,1]$ והאינטגרל הוא 0.

הערה: ראינו בכיתה שאם מניחים גם ש־ f רציפה אז הטענה נכונה.

4. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן (בכל $\mathbb{R}$) ומחזורית בעלת מחזור $T > 0$ הוכח שלכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x+T)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

5. הוכח: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x}dx \leq \frac{\pi^2}{64}$

נשתמש באי־השיוויון: $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ (אפשר לקבל אותו דרך טור טיילור, או דרך חקירת פונקציות).

ואז: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos x}{x}dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{4}x^2|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{64}$

6. תהי $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$. כאשר $n > 0$, $\{a_k, b_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{R}$ קבועים כלשהם.

הוכיחו כי קיים $x_0 \in [0,2\pi]$ כך ש $f(x_0) = 0$.

נשים לב ש: $\int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx)dx = 0$ ולכן גם $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

כמו כן, f רציפה, ולכן לא יתכן $f > 0$ תמיד או $f < 0$ תמיד. כלומר, קיים $x_0 \in [0,2\pi]$ כך ש: $f(x_0) = 0$.

7. חשב את הגבולות:

(א) נזכור שאם $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ אז $F'(x) = f(x)$

כמו כן, אם $G(x) = F(g(x)) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$ אז $G'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}dt}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x \cdot 2x}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}$$

(ב) נשים לב שעבור $x > 0$ מתקיים: $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$ ולכן:

$$|\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}dx| \le \int_n^{n+p} |\frac{\sin x}{x}|dx \le \int_n^{n+p} \frac{1}{x}dx = \ln x|_n^{n+p} = \ln\frac{n+p}{n} = \ln(1+\frac{p}{n}) \to 0$$

מכאן נובע: $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}dx = 0$

(ג) נזכור שעבור פונקציה f אינטגרבילית מתקיים: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(k\frac{b-a}{n})$

לכן (עבור $a=0, b=2, n\to 2n, f(x) = xe^{x^2}$ נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n} ke^{(\frac{k}{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{n}e^{(\frac{k}{n})^2} = \int_0^2 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}|_0^2 = \frac{1}{2}(e^4-1)$$

(ד) $\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(\frac{k}{n})^2+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)|_0^1 = \frac{\pi}{4}$