חדו"א 1ב' - פתרון לתרגיל מספר 14

1. -

(א) $\int_4^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{b\to\infty}\int_4^b \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{b\to\infty} -2x^{-1/2}|_4^b = \lim_{b\to\infty}(1-\frac{2}{\sqrt{b}}) = 1$

(ב) $\int_0^4 \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^4 \frac{dx}{x^{3/2}} = \lim_{a\to 0^+} -2x^{-1/2}|_a^4 = \lim_{a\to 0^+}(\frac{2}{\sqrt{a}}-1) = \infty$

(ג) $\int_1^\infty \frac{dx}{x+1} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x+1} = \lim_{b\to\infty} \ln(x)|_4^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 4) = \infty$

(ד) -

(ה) -

(ו) -

(ז) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} x=t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 2e^t dt = \lim_{a\to 0^+} 2(e-e^a) = 2(e-1)$

2. -

3. נבדוק עבור $p\neq 1$:

(א) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{a\to 0^+}\frac{x^{1-p}}{1-p}|_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{a^{p-1}}}{1-p}$

לכן האינטגרל מתכנסת אמ"מ קיים הגבול $\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{a^{p-1}}$, וזה קורה אמ"מ $p-1\leq 0$, כלומר $p<1$.

(ב) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\frac{1-\frac{1}{b^{p-1}}}{1-p}$

לכן האינטגרל מתכנסת אמ"מ קיים הגבול $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{p-1}}$, וזה קורה אמ"מ $p-1\geq 0$, כלומר $p>1$.

4. הוכח או הפרך:

(א) לא נכון. למשל: $f(n)=\frac{1}{n}$ עבור מספרים טבעיים $n\in\mathbb{N}$, ו- $f(x)=0$ עבור $x\notin\mathbb{N}$.

(ב) לא נכון. למשל: $f(x)=1/\ln(x)$.

ואז $\lim_{a\to 0^+}\lim_{b\to\infty}\ln(\ln(x))|_a^b = \int_1^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ לא מתכנס.

(ג) לא נכון. למשל: $f(x)=1/x$

(ד) לא נכון, למשל: $f(x)=-1/x$.

(ה) זה נכון תחת ההנחה ש- f ואינטגרליבית רימן בכל קטע סופי.

הסבר: נשים לב כי $\int_0^\infty e^{-x}=1$. ולכן $g(b)=\int_0^b f(x)dx \leq \int_0^b e^{-x}\leq 1$.

כעת, g פונקציה חסומה ועולה ולכן יש לה גבול באינסוף.