

פתרונות נבחרים לתרגיל 2 - חדווא 1 לפיסיקאים

11 בנובמבר 2010

2.(א) נניח בשלילה כי $\sqrt[3]{3} \in \mathbb{Q}$ אז קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ זרים כך ש- $\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n}$. הכוונה בכך שהמספרים זרים היא שאין להם גורם ראשוני משותף. קיימים כאלה כי אפשר לצמצם את השבר עד שאין עוד גורמים משותפים שניתן לצמצם. ואז נקבל: $\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n} \Rightarrow 3 = \left(\frac{m}{n}\right)^3 \Rightarrow 3n^3 = m^3$. לכן, $m = 3k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$ כלשהו, ואז נקבל: $3n^3 = m^3 = 27k^3 \Rightarrow n^3 = 9k^3$. כלומר n מתחלק ב-3. קבלנו איפוא, שיש ל- n גורם m משותף, בסתירה להנחה הראשונית שלנו. לכן $\sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.

2.(ב) נניח בשלילה כי $\log_2 3 \in \mathbb{Q}$ אז קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ חיוביים כך ש- $\log_2 3 = \frac{m}{n}$. ואז נקבל: $\log_2 3 = \frac{m}{n} \Rightarrow 3 = 2^{m/n} \Rightarrow 3^n = 2^m$. אבל שיוויון זה לא אפשרי, שכן 3^n אינו מתחלק ב-2 בעוד ש- 2^m כן.

3. הוכח או הפרך:

1. הטענה לא נכונה: $a = b = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow ab = 2 \in \mathbb{Q}$
2. הטענה נכונה. נניח בשלילה ש: $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, $a + \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \Rightarrow a = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2} \in \mathbb{Q}$
3. הטענה לא נכונה: לפי סעיף 2 $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ אז $1 - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ו- $\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \in \mathbb{Q}$
4. הטענה נכונה. הוכחה באינדוקציה.
5. הטענה לא נכונה: $I_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1]$

5.(ו) בסיס האינדוקציה: ברור.
 צעד האינדוקציה: נניח נכונות ל- n ונוכיח: $|\sin(nx+x)| \leq (n+1)|\sin(x)|$
 נשתמש בזוהת הטריגונומטרית: $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
 אז: $|\sin(nx+x)| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \leq |\sin nx \cos x| + |\cos nx \sin x| \leq |\sin nx| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|$