תרגיל 3 - פתרונות מובחרים

11 בנובמבר 2010

1. -

2. -

3. לפי הגדרה

4. מצא את הגבולות הבאים ע"י שימוש בהגדרה:

(א) $|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}| = |\frac{2n-2n-1}{4n+1}| = |\frac{1}{4n+1}| < \epsilon \iff |4n+1| > \frac{1}{\epsilon} \iff n > \frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{4}$

(ב) $|\frac{\sin(n^2)}{n}| < |\frac{1}{n}| < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$

5. סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת לגבול L אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n > N$ כך ש- $|a_n - L| \geq \epsilon$.

(א) נבחר $\epsilon = \frac{1}{2}$

(ב) לסדרות הבאות אין גבול:

i. נניח בשלילה שיש גבול L. נבחר $\epsilon = 1$ ו- $N > |L+1|$ אז $|(-n)^n - L| > |(L+1)^n - L| > 1$

ii. נשים לב שזה הסדרה: $\{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1...\}$.

6. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$סדרה מתכנסת עם גבול L. אם הבדרה קבוע, כלומר $\forall m, n \in \mathbb{N}\ a_n = a_m = L$אז כל הקודה היא מקסימלית ומינימלית. נניח שהסדרה לא קבוע, אז נוכל למצוא $\epsilon > 0$ כך ש $A = \{a_n||a_n - L| > \epsilon\} \neq \phi$. כמו כן, לפי הגדרת הגבול הקבוצה A סופית. . לקבוצה סופית תמיד יש איבר מקסימלי ומינימלי. אם כל האבירים ב Aגדולים מהאיברים בסדרה שלא ב A נקבל מקסימום, וכו'

7. הוכח\הפרך:

(א) הטענה לא הכונה. מצפיפות של מספרים רציונלים ב$\mathbb{R}$נוכל ליצור סדרה רציונלית שמתכנסת למספר אי רציונלי.

(ב) הטענה נכונה. אם הגבול חיובי (או שלילי) הטענה פשוטה, כי אז הסדרה חיובית (או שלילית) מלבד מספר סופי של איברים. נשאר המקרה שהגבול הוא אפס אבל אז נשתמש בהדרת הגבול ונקבל: $||a_n|| = |a_n| < \epsilon$

(ג) הטענה לא נכונה. ניקח $a_n = (-1)^n$

8. לפי הגדרת הגבול קיים $\epsilon_1 > 0$ ו-$N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n > N \ : \ |a_n - L| < \epsilon$. אז, $\forall n > N \ : \ |\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| = |(\sqrt{a_n} - \sqrt{L}) \cdot (\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}})| = |\frac{a_n - L}{\sqrt{a}_n + \sqrt{L}}| \leq \frac{\epsilon_1}{\sqrt{L-\epsilon_1}+\sqrt{L}}$. נשים לב שאם לנו סדרה $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$כך ש $\epsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (נוכל לבחור לדוגמא $\epsilon_n = \frac{1}{n}$)אז מאריתמטיקה של גבולות: $\frac{\epsilon_n}{\sqrt{L-\epsilon_n}+\sqrt{L}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. לכן, מהגדרת הגבול ניקח סדרה כזאת, ונוכל לבנות סדרה $\{N_n \in \mathbb{N}\}_{n=1}^{\infty}$כך ש- $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall n > N_k \ : \ |a_n - L| < \epsilon_k$. מהאי שיוויון למעלה קיבלנו שאם ניקח $n > N_k$ אז מכלל הסנדוויץ נקבל: $0 < |\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| < \frac{\epsilon_n}{\sqrt{L-\epsilon_n}+\sqrt{L}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$וסיימנו את ההוכחה.

9. זו סדרה מונטונית, צריך רק לבדוק מתי היא עולה, ואז היא תהיה לא חסומה, ומתי היא יורדת, ואז היא תהיה מונוטונית וחסומה, והיא תתכנס.

10. חשב את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3+5(\frac{5}{3})^n} + \frac{1}{3(\frac{3}{5})^n+5}\right) = \frac{1}{5}$

(ב) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n\sin n-\cos n}{2n^2+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\sin n}{n}-\frac{\cos n}{n^2}}{2+\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}$

(ג) $7 = {}^n\sqrt{7^n} <^n \sqrt{7^n+4^n+3^n} <^n \sqrt{3}^n\sqrt{7^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 7$