פתרונות נבחרים לתרגיל 4 - חדווא 1ב' לתלמידי פיסיקה

24 בנובמבר 2010

1. חשבו את הגבולות במובן הרחב (כלומר כולל $\pm\infty$) של הסדרות הבאות:

(א) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})^{-n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{-n}$
כעת מכיוון ש: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})=e$
נקבל ש: $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}$

(ב) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-4}\right)^{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-4}\right)^{3(n^2-4)+17}=e^3$

(ג) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+5}{4n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1/4}\right)^n=e$

(ד) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3n+5}{n^2-5n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{7n+5}{n^2-5n}\right)^n=\infty$

(ה) $\lim_{n\to\infty}q^{n-1}$,
כאשר $q>1$ הגבול הוא אינסוף.
כאשר $q=1$ הגבול הוא 1.
כאשר $-1<q<1$ הגבול הוא 0.
כאשר $q\leq -1$ אין גבול.

(ו) נסמן $a_n=a$ אז $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

(ז) $0\leq\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n}\leq\frac{4}{n}\to 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

(ח) נסמן $a_n=\frac{2^{n^2}}{n!}$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$ (למה?) ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}=\infty$ (תזכרו בטענה דומה שהוכחנו בתרגול)

(ט) $0\leq\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\leq\frac{1}{n}\to 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

(י) $0\leq\frac{q^n}{n!}=\frac{q}{1}\cdot\frac{q}{2}\cdot\frac{q}{3}\cdots\frac{q}{n-1}\cdot\frac{q}{n}\leq\frac{C}{n}\to 0$ (עבור $n>[q]$) ולכן $\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!}$ כאשר $C=\frac{q^{[q]}}{[q]!}$

2. תהי $\{a_n\}_{n=0}^\infty,\{b_n\}_{n=0}^\infty$ סדרות כך ש $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ הוכח או הפרך:

(א) הטענה נכונה

(ב) הטענה נכונה

(ג) דוגמא נגדית: $a_n=n\ ,\ b_n=\frac{(-1)^n}{n}$

(ד) דוגמא נגדית: $a_n=n^2\ ,\ b_n=\frac{1}{n}$

(ה) דוגמא נגדית: $a_n=n\ ,\ b_n=\frac{1}{n}$.

(ו) אם $|a_nb_n| \leq c \cdot |a_n|$ ולכן $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$ $\lim_{n\to\infty}|a_nb_n| \geq c \cdot$.

3. הוכחה דומה לנעשה בתרגול

4. הוכחה דומה לנעשה בתרגול

5. -

6. קבוצת הגבולות החלקיים:

(א) $PL = \{1, -1\}$

(ב) $PL = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\}$

(ג) $PL = \{0, \infty, -\infty\}$

(ד) $PL = \{0\}$

7. -

8. תן דוגמא לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-

(א) למשל הסדרה: $(1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, ...)$
אז קבוצת הגבולות החלקיים הינה: $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\} \cup \{0\}$

(ב) נגדיר: $a_n = \{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, ...\}$
אז נקבל: $PL(\{a_n\}) = [0, 1]$