פתרונות נבחרים לתרגיל 5 - חדווא 1ב' לתלמידי פיסיקה

25 בנובמבר 2010

1. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:
   (א) נסמן $a_n=n$ אז $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim(n+1)=\infty$ לכן $\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$
   (ב) נסמן $a_n=n+1$ אז $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{n+2}{n+1}=1$ לכן $\lim(1+n)^{\frac{1}{n}}=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$
   (ג) $\lim\sqrt[n]{2^n+3^n}=3\cdot\lim\sqrt[n]{1+(\frac{2}{3})^n}=3$
   (ד) נסמן $a_n=\binom{2n}{n}$ אז $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=4$ לכן $\lim\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}}=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$
2. נשים לב שהסדרה המתקבלת היא הסדרה: $2,0,0,0,2,0,0,0,2,0,0,0...$ לכן $PL(\{a_n\}_{n=0}^{\infty})=\{0,2\}$
3. הוכח:
   (א) נניח כי $\lim_{n\to}a_n=L>0$ צריך להראות כי $\limsup(a_n\cdot b_n)=L\cdot\limsup(b_n)$
   נניח כי $\lim_{k\to\infty}b_{n_k}=b$ אז מתקיים $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}b_{n_k}=L\cdot b$ לכן $\limsup(a_n\cdot b_n)\geq L\cdot\limsup(b_n)$
   כעת נניח כי $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}b_{n_k}=c$ אז $\lim_{k\to\infty}b_{n_k}=\dfrac{c}{L}$ לכן $\frac{1}{L}\cdot\limsup(a_n\cdot b_n)\leq\limsup(b_n)$
   השיוויון המבוקש נובע משני אי־השיוויונים.
   (ב) לפי שאלה 3 מתרגיל 3, מתקיים: $\inf\limits_{k\geq n}a_k=-\sup\limits_{k\geq n}(-a_k)$
   לכן מתקיים: $\liminf(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}(-\sup\limits_{k\geq n}(-a_k))=-\limsup(-a_n)$
   (ג) נניח $\limsup|a_n|=0$ אז $\sup PL(\{|a_n|\})=0$ אבל $\{|a_n|\}$ קבוצה של מספרים אי־שליליים ולכן כל הגבולות החלקיים אי־שליליים. מכאן נובע כי $PL(\{|a_n|\})=\{0\}$ ולכן $\lim|a_n|=0$ ומכאן קל לראות (נובע ישירות מההגדרה של הגבול) שמתקיים $\lim a_n=0$
4. הוכח:
   (א) לכל סדרות a_n ו־ b_n אז $\limsup(a_n+b_n)\leq\limsup(a_n)+\limsup(b_n)$
   (ב) נניח $a_n\leq b_n$ אז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\sup\limits_{k\geq n}a_k\leq\sup\limits_{k\geq n}b_k$ ולכן $\limsup(a_n)\leq\limsup(b_n)$
   השתמשנו בעובדה הבאה: אם $A\subseteq B$ אז $\sup A\leq\sup B$ (למה?)
   (ג) נניח $a_n\leq b_n$ אז $\liminf(a_n)=-\limsup(-a_n)\leq-\limsup(-b_n)=\liminf(b_n)$
   (ד) אם $\limsup|a_n|\leq\epsilon$ אז $\sup PL(\{|a_n|\})\leq\epsilon$ לכן $PL(\{|a_n|\})\subseteq[0,\epsilon]$ ולכן $PL(\{a_n\})\subseteq[-\epsilon,\epsilon]$ (למה?) ומכאן נובעים שני אי־השיוויונים המבוקשים: $\limsup a_n\leq\epsilon$ וגם $\liminf a_n\geq-\epsilon$
5. פתרון:
   (א) לפי קרטריון קושי לכל ϵ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m>N$ אז $|a_n-a_m|<\epsilon$. בפרט אם נבחר $\epsilon=1$ אז קיים N_1 כך שלכל $n>N_1$ אז $|a_n-a_m|<1$. מכוון ש a_n,a_m שלמים, והמרחק בניהם קטן מאחד, אז הם אותו המספר.
   (ב) אם סדרה היא קבועה אז ברור שהיא מתכנסת. בכיוון השני, אם סדרה היא מחזורית ממחזור k ומתכנסת, אז היא מקבלת בסה"כ $k-1$ מספרים שונים($a_1,a_2...a_{k-1}$). נניח ש $a_1\neq a_{1+l}$ עבור $0<l<k+1$. אז נסמן $d_l=|a_{1+l}-a_1|$, ונסמן $d=min(d_1,d_2...d_{k-1})$ לפי קריטריון קושי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m>N$ אז $|a_n-a_m|<d\leq d_l$ ובפרט נוכל לבחור $m=n+l$ בסתירה להנחה ש $a_1\neq a_{1+l}$ עבור $0<l<k+1$.
6. -

7. הוכיחו באמצעות קריטריון קושי:

(א) הערה: נשים לב שהסדרה הנתונה $a_n = \frac{1+1}{1^2\cdot 3^1} + \frac{2+1}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{n+1}{n^2\cdot 3^n}$ היא למעשה סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה $b_n = \frac{n+1}{n^2\cdot 3^n}$, כלומר $a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.
נשתמש בכך ש: $b_n \leq \frac{2}{3^n}$ (אפשר להשתמש בהרבה הערות אחרות...)
$n > m \Rightarrow a_n - a_m = b_{m+1} + \ldots + b_n \leq \frac{2}{3^{m+1}} + \ldots + \frac{2}{3^n} \leq \frac{2}{3^{m+1}} + \frac{2}{3^{m+2}} \ldots = \frac{1}{3^m}$
(השתמשנו כאן בנוסחא לסכום של סדרה הנדסית)
ומכיוון ש: $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{3^m} = 0$ נוכל למצוא N כך ש: $n > m \geq N \Rightarrow a_n - a_m \leq \frac{1}{3^m} \leq \epsilon$
לכן a_n סדרת קושי, ולכן מתכנסת לגבול סופי.

8. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה חסומה כלשהיא. נגדיר: $A = \{|a_n - a_m| : n \neq m \in \mathbb{N}\}$. הוכח או הפרך:

(א) נכון, לפי בולצנו ויירשטרס יש תת־סדרה מתכנסת. תת סדרה זה היא קושי ולכן הטענה מתקבלת.
(ב) בוודאי. $|a_n - a_m| < 2M$ כאשר M הוא החסם. אז אם יש חסם סופי, וודאי שהחסם המינמלי הוא סופי.
(ג) לא נכון, לדוגמא $a_n = \frac{1}{n}$ אז $\sup A = 1$ אבל לכל $n, m \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a_m| \leq |1 - \frac{1}{max(m,n)}| < 1$$

9. ישנם מספר דוגמאות אפשריות. היפה מבניהם היא הסדרה: $(1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5} \ldots)$

10. יהיה $\epsilon > 0$. נשים לב ש: (עבור $n > m$ טבעיים)

$$|a_n - a_m| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-2} + \ldots - a_{m+1} + a_{m+1} + a_m|$$

$$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \ldots. + |a_{m+1} + a_m| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

ראינו בתרגיל שזה טור מתכנס, ולכן נותר רק להראות שבבחירת n, m גדולים מספיק נוכל לקבל ש: $\sum\limits_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^k} < \epsilon$, וזה נובע מכך שהסדרה $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$ היא סדרה מתכנסת (השתמשנו בנוסחא לסדרה גאומטרית), ולכן קושי ובפרט לכל $\epsilon > 0$ $|s_n - s_m| < \epsilon$.