# פתרונות נבחרים לתרגיל 6

1 בדצמבר 2010

1. -
2. תחום ההגדרה:
   (א) $\mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}$
   (ב) $\mathbb{R}\backslash\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{3\pi}{2}+k\pi]$
3. -
4. מצאו הופכי אם קיים. וציינו אם הפונקציות הן מונוטוניות. רשמו תחומי עליה וירידה.
   (א) הפונקציה חח"ע ועל. אם $x,y\in\mathbb{R}$ אז $1-x^3=1-y^3 \iff x^3=y^3 \iff x=y$. והפונקציה ההופכה היא: $f^{-1}(x)=(1-y)^{\frac{1}{3}}$ ואכן: $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$ לכל $x\in\mathbb{R}$. הפונקציה יורדת, כי $x^3$ פונקציה עולה.
   (ב) ברור לפי ההגדרה ש $\cos h(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ וש- $\sinh(x)\geq 0$ עבור כל $x\geq 0$ ו- $\sinh(x)<0$ לכל $x<0$ כמו כן אם $x>y$ אז נוכל לקבל בקלות ע"י הנוסחא $\sinh(x)-\sinh(y)=2\cosh(\frac{x+y}{2})\sinh(\frac{x-y}{2})$ את תחום העליה והירידה של הפונקציה. סינוס הוא אכן חח"ע ועל.
   (ג) -
   (ד) -
   (ה) -
5. הוכח:
   (א) $f(0)=-f(0) \iff f(0)=0$
   (ב) -
   (ג) -
   (ד) $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)=f(-x)}{2}$. $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ זוגית, ו- $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ אי זוגית.
6. לפי הגדרת הגבול:

(א) -

(ב) -

(ג) אפשר להשתמש בתרגיל שעשינו בסדרות מתרגיל בית 2, ובהגדרת הגבול לפי היינה.

(ד) יהי $\epsilon>0$ אז $|sin(x)-sin(a)|=|2\cos(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2})|<\frac{x-a}{2}$ עבור $x$ קרוב מספיק ל $a$. ולכן נבחר $\delta=\frac{\epsilon}{2}$.

7. חשב את הגבולות:

(א) $\frac{(1+x^3)-(1+3x)}{x^4-x}=\frac{x^2-3}{x^3-1}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}3$

(ב) -

(ג) -

(ד) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{-2\sin(\frac{x+a}{2})\sin(\frac{x-a}{2})}{x-a}=[\lim\limits_{x\to a}\sin(\frac{x+a}{2})]\cdot[\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{a-x}{2}}]=$
$\sin(a)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\sin(a)$

8. חשבו את הגבולות:

(א) $\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x}=\frac{x+\sqrt{x+1}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ב) $\frac{(1+x^3)-(1+3x)}{x^4-x}=\frac{x^2-3}{x^3-1}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$

9. הוכח או הפרך:

(א) לפי הגדרה

(ב) לא נכון. לדוגמא $x^2>x^4$ עבור $x\in(-1,1)\backslash\{0\}$. אבל $\lim\limits_{x\to 0}x^2=\lim\limits_{x\to 0}x^4=0$

(ג) נכון, נניח שבסביבה מנוקבת $D$של $a$ אז $|f(x)|\leq M$. אז לכל סדרה $a_n\longrightarrow a$ לפי הגדרת הגבול של היינה $|g(a_n)f(a_n)|\leq M|g(a_n)|\longrightarrow 0$.
ולכן, לפי הגדרת הגבול של היינה: $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=0$.

10. $\sin(x\pi)$ אינה מתכנסת אבל $\sin(n\pi)\to 0$. לפי הגדרת הגבול של היינה, אז המצב ההפוך לא יתכן. אם $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ אז ההגדרה דורשת שלכל סדרה $a_n$ שהולכת ל $\infty$ הגבול של $f(a_n)$ יהיה $L$, בפרט עבור הסדרה $a_n=n$.