פתרונות לתרגיל 7 - חדווא 1ב' לתלמידי פיסיקה

1. בדוק את הרציפות של הפונקציות הבאות. אם הפונקציה איננה רציפה אז רשום מה נקודות אי הרציפות ומיין אותן:

(א) f רציפה בכל נקודה שונה מאפס כהרכבה של פונקציות רציפות (פונקציות אלמנטריות). כמו כן, f רציפה גם באפס כי:
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} \sin(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

(ב) נראה כי $\mathbb{D}$ אינה רציפה באף נקודה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אז קיימות סדרות $a_n \in \mathbb{Q}, b_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ כך ש: $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$.
מהגדרת $\mathbb{D}$ נובע כי $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0$. לכן אין גבול, ולכן יש אי־רציפות מהסוג השני.

(ג) הפונקציה רציפה: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$

(ד) הפונקציה רציפה: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin(\dfrac{1}{x}) = 0 = f(0)$

(ה) באפס יש נקודות אי־רציפות מהסוג השני. למשל, אם נתבונן בסדרה $x_n = e^{-\pi n/2}$ אז $x_n \to 0$ בעוד שלסדרה $f(x_n) = \sin(-\pi n/2)$ אין גבול.

(ו) יש אי־רציפות מהסוג הראשון בכל נקודה $x = n$ כאשר $n \in \mathbb{N}$ כי $\lim\limits_{x\to n^+}\{x\} = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to n^-}\{x\}$

(ז) מכיוון ש: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ לכל $a > 0$ נובע כי $f(x) = 1$ לכל $x \neq 0$ ו־ $f(0) = 0$. ברור כי אפס היא נקודת אי־רציפות סליקה.

2. נוכיח ש־ $M(x) = max\{f(x), g(x)\}$ רציפה. יהי $x_0 \in \mathbb{R}$.
אם $f(x_0) > g(x_0)$ אז קיים $\delta > 0$ כך ש: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > g(x)$ (למה?) , כלומר $|x - x_0| < \delta \Rightarrow M(x) = f(x)$
כלומר M מזדהה עם f בסביבה של x_0 ולכן M רציפה ב־ x_0.
באותו אופן אם $f(x_0) < g(x_0)$.
נניח $a = M(x_0) = f(x_0) = g(x_0)$. יהיה $\epsilon > 0$. אז קיים $\delta > 0$ כך ש: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon, |g(x) - a| < \epsilon$
ומכיוון ש־ $M(x) = f(x)$ או $M(x) = g(x)$ נובע כי: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |M(x) - a| < \epsilon$ כלומר M רציפה ב־ x_0.

3. נסמן $M = \sup f(x)$, $m = \inf f(x)$ אז צריך להראות כי f מקבלת את הערך M או m.
מכך שהפונקציה שואפת לאפס באינסוף, נובע כי $m \le 0 \le M$.
אם $m = M = 0$ אז $f \equiv 0$ ולכן מקבלת את המקסימום והמינימום.
אחרת $M > 0$ או $m < 0$. נניח כי $M > 0$ (המקרה השני אנלוגי לגמרי).
קיים $N > 0$ כך שאם $|x| \ge N$ אז $|f(x)| < M$.
ואז הפונקציה מקבלת את המקסימום שלה בקטע $[-N, N]$ והוא M.

4. נבדוק רציפות באפס. לשם כך נחשב את הגבולות החד־צדדיים באפס.
$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 = g(0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to \infty} f(x) = 0 = g(0)$$
לכן קיים הגבול של g באפס והוא שווה לערך הפונקציה באפס, לכן g רציפה באפס.

5. הוכחתם בהרצאה.

6. נגדיר פונקציה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = f(x) - f(x + \pi)$ אז g רציפה.
מתקיים: $g(0) = f(0) - f(\pi)$, $g(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) = -g(0)$.

אם $g(0)=0$ אז סיימנו כי אז $f(0)=f(\pi)$.
אחרת $g(0)\cdot g(\pi)=-g(0)^2<0$ ולכן קיים $0<c<\pi$ כך ש: $g(c)=0$ וקבלנו $f(c)=f(c+\pi)$.

7. נסמן: $p(x)=x^3-3x+1$. ונשים לב כי $p(2)=1$, $p(1)=-1$, $p(0)=1$, $p(-2)=-1$.
לכן ממשפט ערך הביניים, קיימים $-2<a<0<b<1<c<2$ כך ש: $p(a)=p(b)=p(c)=0$.

8. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. הוכח או הפרך:

(א) כיוון $\Leftarrow$ תמיד נכון (כפל של פונקציות רציפות). הכיוון השני לא בהכרח.
למשל: $f(x)=1$ עבור $x\geq 0$, $f(x)=-1$ עבור $x<0$. אז $f^2\equiv 1$ רציפה, אך f לא רציפה.

(ב) כיוון $\Leftarrow$ תמיד נכון (הרכבה של פונקציות רציפות). הכיוון השני לא בהכרח.
למשל: $f(x)=0$ עבור $x\neq 1$, $f(1)=2$. אז $f\circ f\equiv 0$ אבל f לא רציפה.

(ג) כיוון $\Leftarrow$ נכון (הרכבה של פונקציות רציפות). למעשה, הכיוון השני גם נכון מאותה סיבה,
שכן הפונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g(x)=\sqrt[3]{x}$ רציפה.
ומתקיים $f=h\circ g$ כאשר $h(x)=f(x^3)$.

9. יש הרבה דוגמאות שהן ווריאציות של פונקציית דריכלה $\mathbb{D}(x)$. למשל: $f(x)=x\cdot\mathbb{D}(x)$.
אז מכיוון שפונקציית דריכלה חסומה, נובע כי $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, כלומר f רציפה באפס.
אבל היא לא ריצפה באף נקודה שונה מאפס, שכן אחרת $\mathbb{D}(x)=f(x)/x$ הייתה רציפה שם.