פתרונות נבחרים לתרגיל 8 - חדווא 1ב' לתלמידי פיסיקה

16 בדצמבר 2010

1. קבע אם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש והוכח:

   (א) הפונקציה אכן רציפה במ"ש לכל $\epsilon > 0$ נבחר $\delta = \epsilon$. שכן:

   $$|\sin(x) - \sin(y)| = |2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})| \leq |x-y|$$

   (האי שיוון האחרון נובע כי $|\cos(x)| \leq 1$ וגם $|\sin(x)| \leq |x|$.)

   (ב) הפונקציה רציפה במ"ש, נובע ישירת ממשפט קנטור.

   (ג) הפונקציה לא רציפה במ"ש. עבור $\epsilon = 1$ אז בהינתן δ נבחר $x = \frac{\frac{2}{\delta}-\delta}{2}$ $y = \frac{\frac{2}{\delta}+1}{2}$:

   $$|x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| = |\delta \cdot \frac{2}{\delta}| = 2$$

   (ד) הפונקציה לא רציפה במ"ש. נבחר $\epsilon = \frac{1}{2}$ ותהי δ אז נבחר $x = \frac{1}{n\pi}$ ו $y = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. ברור שנוכל לבחור n מספיק גדול כך ש $|x-y| < \delta$ (שכנע את עצמך. פתור את האי שיוון או תשתמש בכך שכל סדרה מתכנסת מקיים תנאי קושי.) אז:

   $$|\sin(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{y})| = 1 > \frac{1}{2}$$

   (ה) הפונקציה רציפה במ"ש. (ראינו בכיתה עבור הקטע $[0,1]$) נשים לב ש: $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 0$. ולכן מלמה שהראנו בכיתה הפונקציה רציפה במ"ש. (פונקציה בעלת גבולות סופיים ב$\pm\infty$ היא רציפה במ"ש.)

2. הראה ש:

   (א) נבחר $\epsilon < \ln(2)$ ובהינתן δ נבחר $x = \delta$ ו $y = 2\delta$ $|\ln(x) - \ln(y)| = |\ln(\frac{x}{y})| = |\ln|\frac{2\delta}{\delta}|| = |\ln(2)| > \epsilon$

   (ב) יהי $\epsilon > 0$ נבחר $\delta = \epsilon$. אם $|x-y| < \delta$ אז $y - \delta < x < y + \delta$

   $$|\ln(x) - \ln(y)| = |\ln(\frac{x}{y})| < |\ln(\frac{y+\delta}{y})| = |\ln(1+\frac{\delta}{y})| < \frac{\delta}{y} \leq \delta$$

   האי שיוון הראשון נובע מכך ש $\ln$פונקציה עולה. האי שיוון השני נובע מהאי שיוון: $e^x > 1+x$ והוצאת $\ln$ משני הצדדים כאשר אנחנו זוכרים שוב ש $\ln$פונקציה עולה. האי שיוון האחרון נובע מכך ש$y \geq 1$ (זה הקטע אותו אנו בודקים!)

3. בהינתן $\epsilon > 0$ נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{M}$. נקבל רציפות במ"ש לפי הגדרה.

4. יהיו f, g פונקציות רציפות במ"ש. הוכח או הפרך:

   (א) לא נכון, נבחר $f(x) = g(x) = x$ רציפה במ"ש אבל ראינו בשאלה 1 ש x^2 לא רציפה במ"ש.

   (ב) הטענה נכונה: יהי $\epsilon > 0$ נבחר אז קיים δ_1 כך ש־ $|x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon$. כמו כן קיים δכך ש־ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta_1$ (אל תתנו ל δ_1 לבלבל אותכם! זה פשוט נובע מהגדרה של רציפות במ"ש. לפי ההגדרה זה מתקיים לכל ϵ ובפרט ל $\epsilon = \delta_1$). אז

   $$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(y))| < \delta$$

5. גזרו את הפונקציות הבאות ע"פ הגדרת הנגזרת כגבול:

(א) $\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2+2}-\frac{1}{x^2+2}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{x^2+2-(x^2+2hx+h^2)-2}{((x+h)^2+2)(x^2+2)}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-2x+h}{((x+h)^2+2)(x^2+2)}=\frac{-2x}{(x^2+2)^2}$

(ב) $\lim\limits_{h\to0}\frac{\frac{1}{\sin(x+h)}+\frac{1}{\sin(x)}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(x)-\sin(x+h)}{h\sin(x)\sin(x+h)}=\lim\limits_{h\to0}\frac{-2\frac{\sin(\frac{h}{2})}{h}\cos(\frac{2x}{2}+\frac{h}{2})}{\sin(x)\sin(x+h)}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\cdot\lim\limits_{h\to0}\frac{-\cos(x+\frac{h}{2})}{\sin(x)\sin(x+h)}=-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

6. קבעו ע"פ הגדרת הנגזרת כגבול אם קיימת נגזרת ב־x_0. אם קיימת חשבו אותה:

(א) הפונקציה גזירה לפי הגדרה.

(ב) הפונקציה לא גזירה ב־0. ראינו בשיעור שלא קיים הגבול: $\frac{|h|}{h}$ כאשר: $h\to0$.

(ג) הפקונציה לא גזירה ב־0: נפתח לי הגדרה ונקבל $\sin(\frac{1}{h})$ אבל ראינו שאין גבול כאשר: $h\to0$

(ד) הפונקציה גזירה בכל נקודה. עבור $x\neq0$ מכוון שזה מכפלה והרכבה של פונקציות גזירות. מכוון ש $\frac{1}{x}$לא גזיר ב־ 0 (אפילו לא מוגדר!) אז צריך לבדוק במיוחד לפי הגדרת הגבול. נפתח לפי הגדרה ונקבל: $\lim\limits_{h\to0}h\sin(\frac{1}{h})=0$.(תבדקו שאתם יודעים למה!) הנגזרת ב־0 היא לכן קיימת ו־ 0.

7. גזרו את הפונקציות הבאות:

(א) לפי כלל השרשרת ומכפלה (נזכור גם שנגזרת שומרת על חיבור): $(f(x))'=\frac{3}{2\sqrt{3x}}+\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x^2}$

(ב) $(f(x))'=12x^2(1+2x^2)+(1+4x^3)4x$

(ג) -

(ד) -

(ה) $(f(x))'=24\sin^3(4x)\cos(4x)+12\cos(4x)$

(ו) -

(ז) $(f(x))'=\frac{1}{\ln(3-2x^3)}\cdot\frac{-6x^2}{3-2x^3}$

(ח) $(f(x))'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

8. גיזרו:

(א) -

(ב) $f'=e^{\sin(x)}\cos(x)$

(ג) $f'=(e^{\sin(x)\ln(\cos(x))})'=e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}\cdot(\cos(x)\ln((\cos(x))-\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)})$

9. ברור שהפונקציה גזירה ברציפות עבור $x\neq0$ שכן, כל פונקציה היא אלמנטרית בתחום זה. נגזור ונדרוש שהנגזרת תהיה רציפה ב־0. כלומר ש: $\lim\limits_{x\to0}(\sin(x))'=\lim\limits_{x\to0}(a\sinh(x)+b\cosh(x))'$. נחשב: $\lim\limits_{x\to0}\sin(x)=\lim\limits_{x\to0}cos(x)=1$, $\lim\limits_{x\to0}(a\sinh(x)+b\cosh(x))'=\lim\limits_{x\to0}(a\cosh(x)+b\sinh(x))=a$. כמו כן, נדרוש שהפונקציה תהיה רציפה: $0=\lim\limits_{x\to0}\sin(x)=\lim\limits_{x\to0}a\sinh(x)+b\cosh(x)=b$. לכן קיבלנו ש $a=1,b=0$. אם נגזור פעם נוספת אפשר לראות שהפונקציה גם גזירה פעמיים.