חדו"א 1ב' - תרגיל מספר 9

1. חשב את הנגזרות ה$n-$ של הפונקציות ההבאות:

(א) $(e^x)^{(n)} = e^x$

(ב) $(\ln(1-x))^{(n)} = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n}$

(ג)
$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & n \text{ divides 4 with remainder 0} \\ \cos(x) & n \text{ divides 4 with remainder 1} \\ -\sin(x) & n \text{ divides 4 with remainder 2} \\ -\cos(x) & n \text{ divides 4 with remainder 3} \end{cases}$$

2. נגדיר פונקציית עזר $h(x) = f(x) - g(x)$. נשים לב ש $h(0) = f(0) - g(0) = 0$ כמו כן, $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$ לכן $h(x)$ פונקציה יורדת ממש, ולכן לכל $x > 0$ אז $h(x) < 0$ ולכן $f(x) < g(x)$. נשים לב שלכל $0 < x < 2\pi$ אז $\sin(x)' = \cos(x) < 1 = x'$ ולכן נוכל להשתמש בטענה שעכשיו הוכחנו. עבור $x > 2\pi > 1 > \sin(x)$ הטענה טריוויאלית.

3. נוכיח על ידי אינדוקציה ב n רק שכדי להוכיח את הטענה שלנו נצטרך באינדוקציה להוכיח משהו חזק יותר, והוא שגם הפקונציה הכתובה בשאלה (נסמנה ב $f_1(x)$) שגם הפונקציה

$$g_1(x) = \begin{cases} x^{2n}\cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גזירה n פעמים(לכל $n \geq 1$). בסיס האינדוקציה זה כאשר $n = 1$ וראינו את זה ש $f(x)$ גזירה בשיעור. להראות עבור $g(x)$ זה זהה. נניח באינדוקציה ש $g_k(x)$ ו $f_k(x)$ גזירות k פעמים,

$$(f_{k+1}(x))' = (2k+2)x^{2k+1}\sin(\frac{1}{x}) + x^{2k}\cos(\frac{1}{x})$$

$$(g_{k+1}(x))' = (2k+2)x^{2k+1}cos(\frac{1}{x}) - x^{2k}sin(\frac{1}{x})$$

לפי הנחת האינדוקציה $x^{2k}\sin(\frac{1}{x}),\ x^{2k}\cos(\frac{1}{x})$ גזירות k פעמים, כמו כן $(2k+2)x^{2k+1}\sin(\frac{1}{x}),\ (2k+2)x^{2k+1}\cos(\frac{1}{x})$ גזירות k פעמים כי זאת מכפלה של פונקציות גזירות k פעמים. ולכן $g_{k+1}(x)$ ו־ $f_{k+1}(x)$ גזירות $k+1$פעמים ולפי עיקרון האינדוקציה הוכחנו את הטענה.

4. פשוט הצבה בנוסחא של נגזרת של פונקציה הפוכה

5. -

6. מצא את נקודות המינימום והמקסימום הגלובליות בפונקציות הבאות, בתחום המבוקש.

(א) נשים לב שהפונקציה היא פונקציה לינארית למקוטעין. כלומר ,בכל קטע בא הפקונציה גזירה, היא לינארית, לכן נקודות הקיצון הגלובליות יכוליות להיות רק בקצוות הקטע ובנק הלא גזירות $-1,1$ נציב את הערכים

השונים שקיבלנו בפקונציה, נשווה ביניהם ונקבל את נקודות הקיצון הגלובליות. $f(1) = 2,\ f(-1) = 2,\ f(2) = f(-2) = 4$ לכן נקודות המינימום הגלובליות הן $1, -1$ והמקסימום $2, -2$.

(ב) נגזור ונשווה לאפס± 1 $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x =$ הנקודות החשודות לקיצון הן $1, -1, 3, -3$ (הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת והקצוות) נציב בפונקציה, נשווה ונקבל: $f(1) = \frac{1}{2}\ f(-1) = -\frac{1}{2}\ f(3) = \frac{3}{10}\ f(-3) = \frac{-3}{10}$ בסה"כ נקבל נקודת מינימום ב -1 ומקסימום ב 1.

(ג) נגזור ונשווה לאפס ונקבל שאנחנו צריכים למצוא את הנקודות בהם $\cos(x) = \sin(x)$ וזה כאשר $x_k = \frac{\pi}{4} + \pi k$.

7. הוכח את האי שיוונים הבאים:

(א) נגדיר את הפקונקציה $g(x) = ex - e^x$ נגזור ונקבל שיש נקודות קיצון רק כאשר $x = 1$. נגזור פעמיים ונקבל שהנקודה הינה נק מקסימום. נציב בפקונציה ונקבל $g(1) = 0$ מכוון שזו נקודת מקסימום יחידה, והפונקציה גזירה ב $\mathbb{R}$ אז נקבל שלכל $x \in \mathbb{R}$ אז $g(x) \geq 0$.

(ב) בדומה לסעיף א

(ג) לפי משפט לגרנז' לכל $x, y \in \mathbb{R}$ $(x \leq y)$ אז קיים $x \leq c \leq y$ כך ש:

$$\frac{|\arctan(x) - \arctan(y)|}{|x-y|} = f\text{"}(c) = \frac{1}{1+c^2} \leq 1$$

(ד) בדומה לסעיף א

(ה) נוכל לפתור בשתי דרכים. נוכל להגדיר את הפונקציה $g(x) = ax - e^a - x\ln(\frac{x}{e})$ ולהמשיך בדומה לסעיף א. נוכל גם להגדיר $g(x) = xb - e^b - b\ln(\frac{b}{e})$ ולהמשיך בדומה לסעיף א.

8. אם לפונקציה יש נקודת קיצון בקטע אז זה חייב להיות נקודת מינימום (כי $f''(x) > 0$) והמקסימום יתקבל בקצוות. אם לפונקציה אין נקודת קיצון בקטע אז הפקונציה עולה או יורדת בקטע זה, ולכן המקסימום יתבקל בקצוות.

9. הוכח או הפרך:

(א) תהיה $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a, b), כך שנגזרתה חסומה בקטע אז הפונקציה חסומה בקטע.

(ב) אם f פונצקציה גזירה וחסומה בקטע $[a, b]$ אז נגזרתה חסומה בקטע.

10. הוכח:

(א) נניח ש $f'(x) = a$ אז נגדיר $g(x) = f(x) - ax$ נשים לב ש $g'(x) = a - a = 0$ וכפי שהראנו בתרגול $g(x)$ פונקציה קבוע, נסמן $g(x) = -b$ ואז $f(x) = ax + b$

(ב) נוכיח באינדוקציה. את בסיס האינדוקציה עשינו בסעיף א. נניח שהטענה נכונה עבור k ויהיה f פונקציה כך ש־ $f^{(k)}(x) \equiv 0$ אז קיים קבוע a כך ש־ $f^{(k)}(x) \equiv a$. אז נגדיר $g(x) = f(x) - \frac{a}{k!}x^k$. נשים לב ש $(g^k(x)) = a - a = 0$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה $g(x)$ פולינום מדרגה $k-1$ ואז $f(x) = g(x) + \frac{a}{k!}x^k$ הוא פולינום מדרגה k.

11. נשים לב $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$ ולכן $f(0) = 0$. כמו כן, נחשב את הנגזרת בנקודה כלשהיא

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = f'(0) = a$$

לכן הנגזרת של הפקונציה קבוע ולפי שאלה 10 $f(x) = ax + b$ וגם $b = f(0) = 0$ לכן $f(x) = ax$