

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תש"ף, מועד א'
תאריך: 10.07.2020

מבחן סוף סמסטר ב' "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

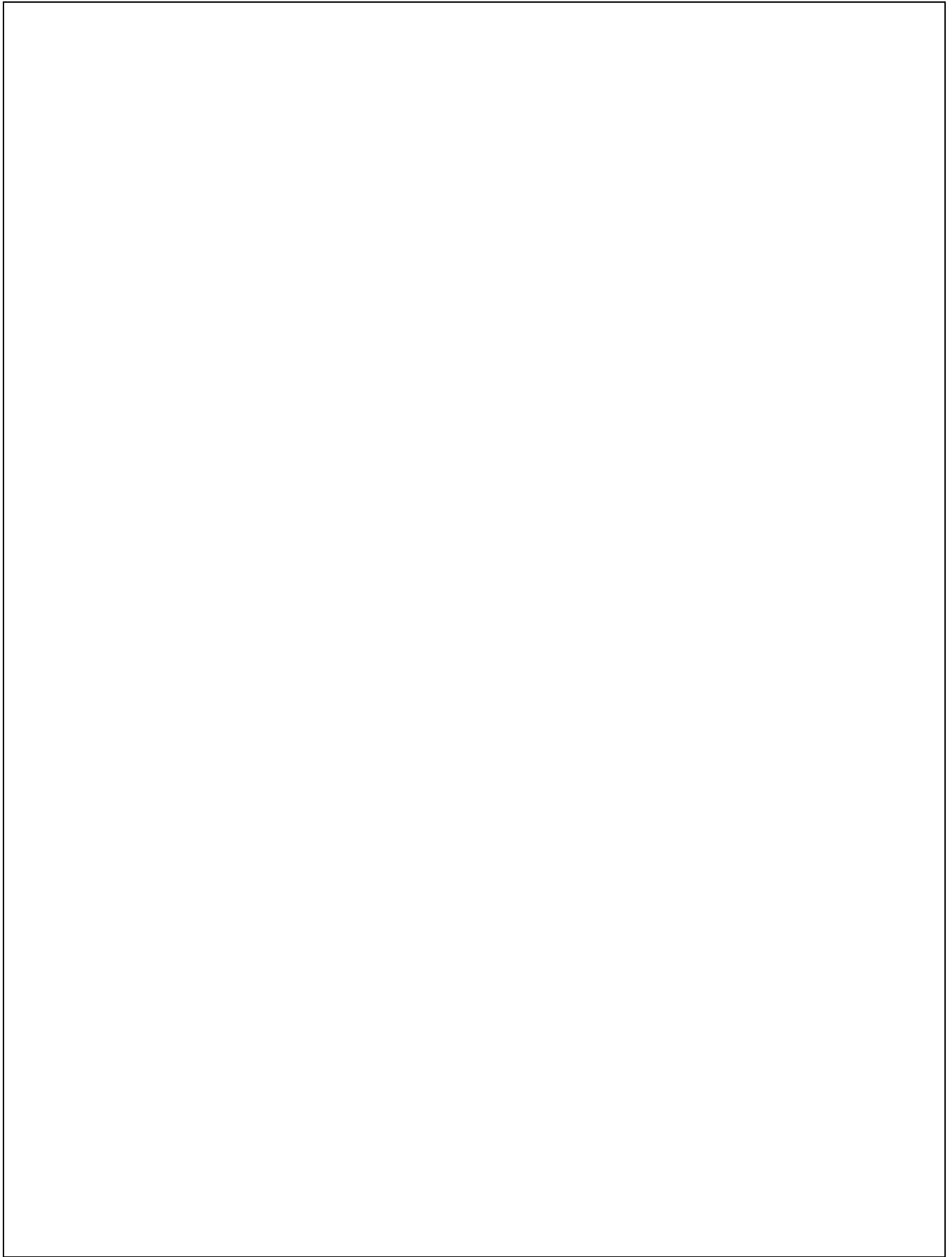
מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (27 נק') להוכיח את המשפט: אם פונקציה f קמורה בקטע פתוח I או f רציפה ב- I .

שאלה 2. (א) (12 נק') מצאו $a \in \mathbb{R}$ עבורו הישר $y = x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = a^x$.
(ב) (15 נק') נתונות פונקציות $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירות. בנוסף, נניח כי לכל $x \in (a, b)$ מתקיים $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$. הוכיחו כי לכל $a < x_1 < x_2 < b$ עבורם $f(x_1) = f(x_2) = 0$ קיימת נקודה $x_0 \in [x_1, x_2]$ עבורה מתקיים $g(x_0) = 0$.



שאלה 3. (א) (12 נק') נגדיר קבוצה A :

$$A = \{x \in [1,100] : x = n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}, n \in \mathbb{N}, \{a_1, a_2, \dots\} = \{3,9\}\}$$

למשל, $x = 24.39339 \dots = 24 + 3 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5} \dots$

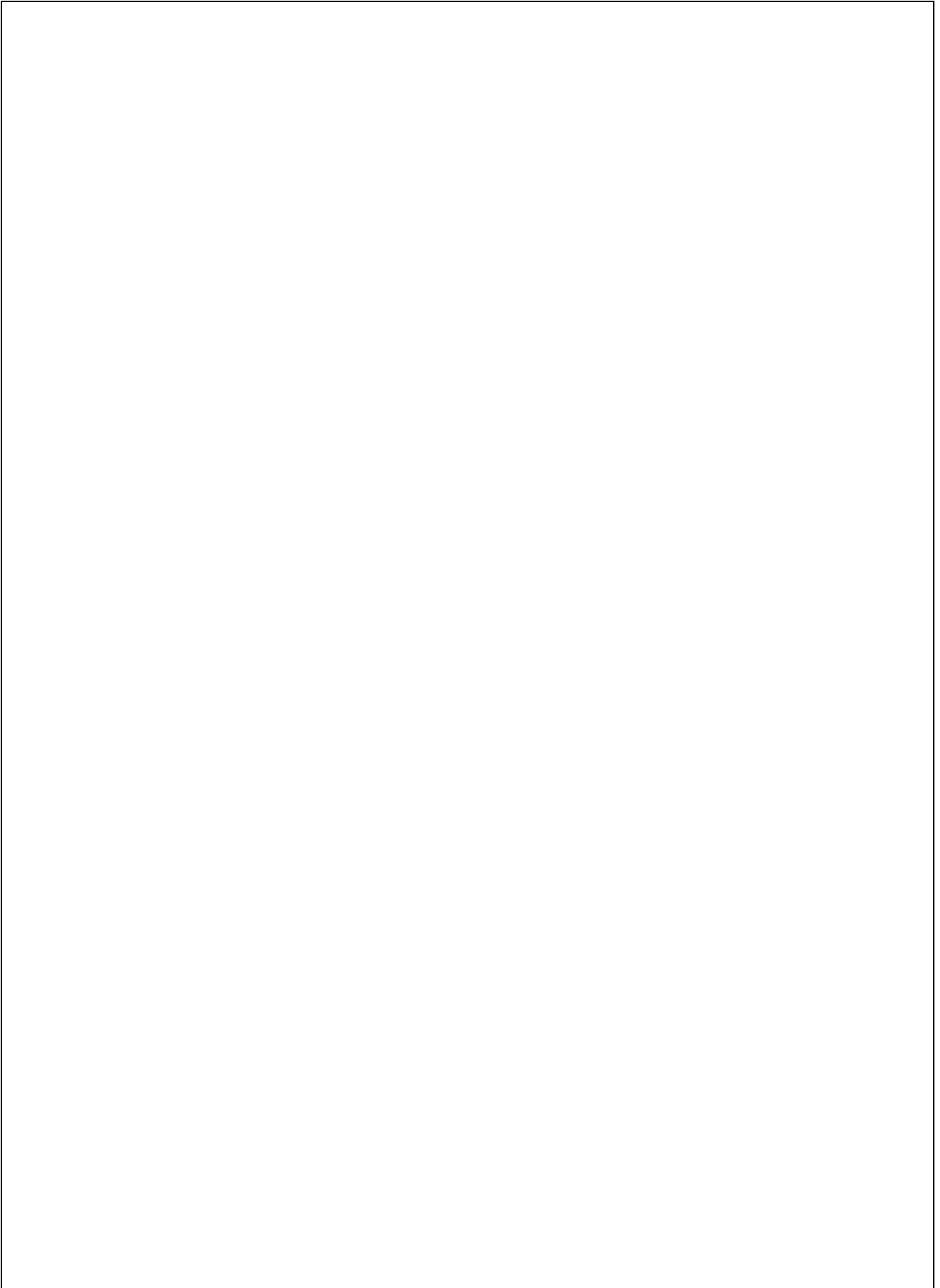
האם קיימים $\min A, \sup A$? הוכיחו. במידה וקיימים – חישבו.

(ב) (15 נק') תהי f פונקציה גזירה בקטע $(-\delta, \delta)$, כאשר $\delta > 0$. ידוע כי

$f(0) = 0$ וכי הנגזרת $f'(x)$ רציפה ועולה בקטע. תהי (x_n) סדרה יורדת של נקודות

בקטע השואפת לאפס. הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} f'(x_n)$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ מתכנס.

רמז: הוכיחו ש- $f'(0) = 0$.



שאלה 4. (א) (12 נק') יהי $\alpha \in (0,1)$. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$$

(ב) (15 נק') לאילו ערכים של $q > 0$ הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^q}$ מתכנס, ולאילו ערכים הוא

מתבדר?

