

## מבחן בחדו"א 1א

מועד א', סמסטר א' תשפ"א, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' יעקב יעקובוב, פרופ' אסף נחמיאס, ד"ר ארז פייטן

משך הבחינה שלוש שעות. אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את הסעיף, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל) מערך הסעיף או השאלה. בבחינה 4 שאלות והניקוד עבור כל שאלה הוא 27 נקודות. סך כל הנקודות בבחינה 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.

אנא כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את תשובותיכם, ואל תחרגו מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

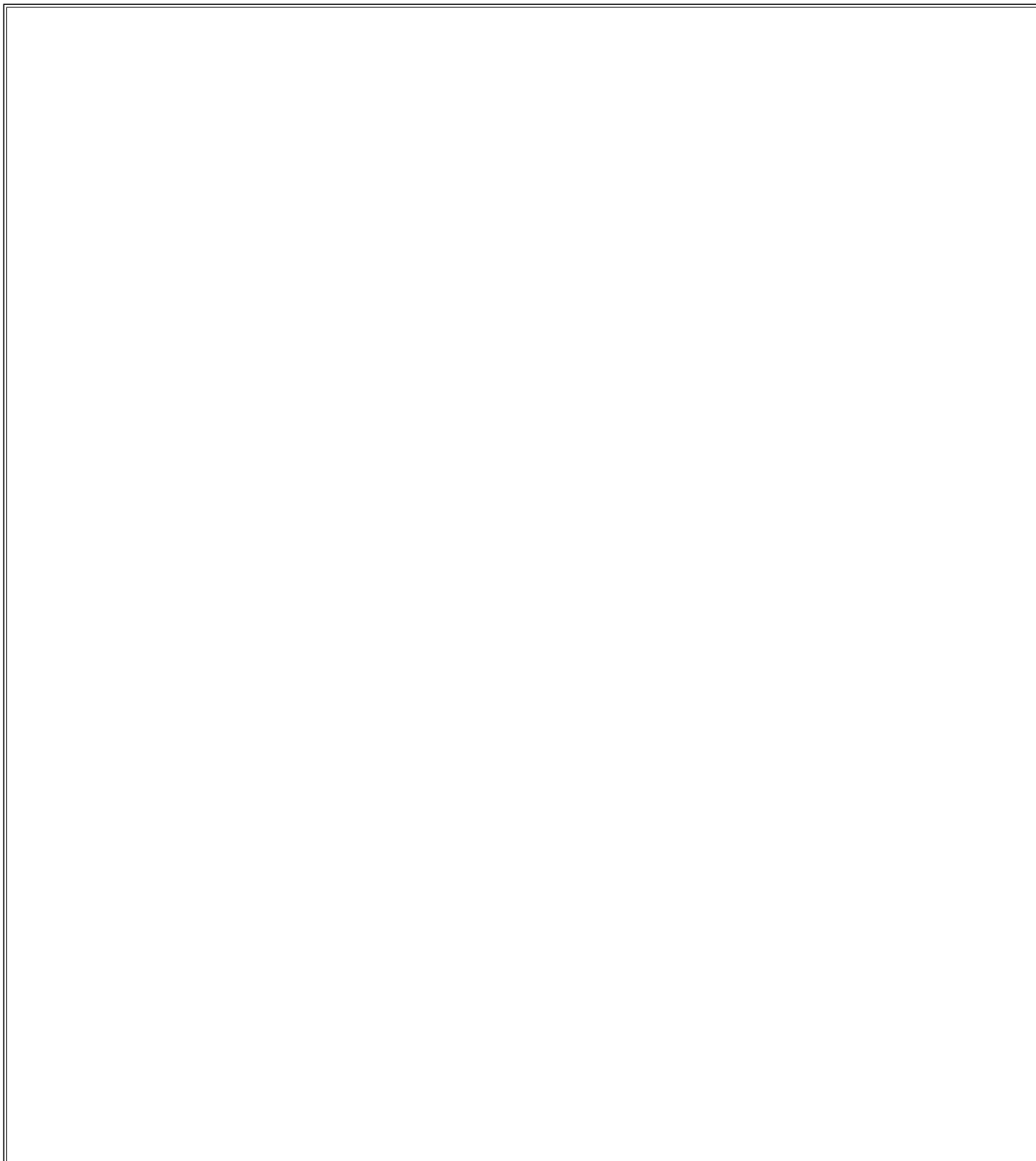
עליכם לצטט במדוייק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתירגול בה הינכם משתמשים. אי-צטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה. **אין להשתמש בשום חומר עזר.**

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

**בהצלחה!**

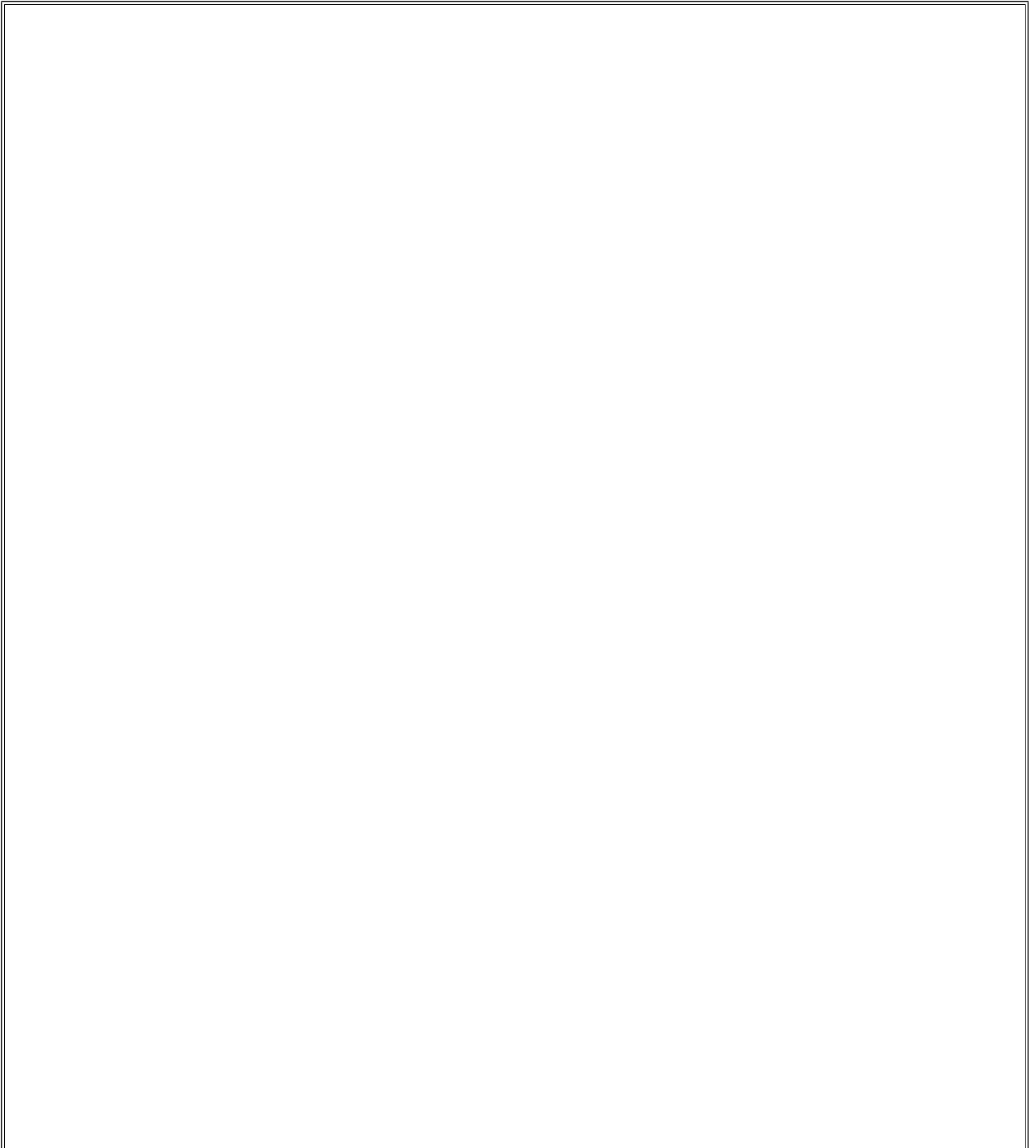
1. א. (10 נק') בנו סדרה  $\{a_n\}$  המקיימת  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1} = 1$  ושיש לה לפחות שלושה גבולות חלקיים סופיים.
- ב. (17 נק') האם קיים וממשי הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}})^{\sin \frac{1}{n}}$ ? אם לא הוכיחו שלא, אם כן חשבו את הגבול.

2. (נק' 27) יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור חיובי ונסמן  $\ell = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$  ו-  $u = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . הוכיחו את מבחן המנה הגבולי לטורים, כלומר, הוכיחו כי אם  $\ell < 1$  אז הטור מתכנס, וכי אם  $u > 1$  אז הטור מתבדר.



3. א. (13 נק') תהא  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה עולה המקיימת  $f((a, b)) \subset (c, d)$  ו-  $f((a, b)) \subset \mathbb{Q}$ . הוכיחו כי רציפה ב- $(a, b)$ .

ב. (14 נק') תהא  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה כך שהקבוצה  $A = \{T > 0 : f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$  אינה ריקה. הוכיחו כי קבועה אם ורק אם  $\inf A = 0$ .



4. א. (10 נק') הוכיחו כי  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \geq 0$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

ב. (17 נק') תהא  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים כך ש-  $\forall x \in \mathbb{R} f''(x) \geq 0$  ו-  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . הוכיחו כי  $f(x) \geq 0$   $\forall x \in \mathbb{R}$ .

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):