

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ב, מועד א'
תאריך: 24.06.2022

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה !

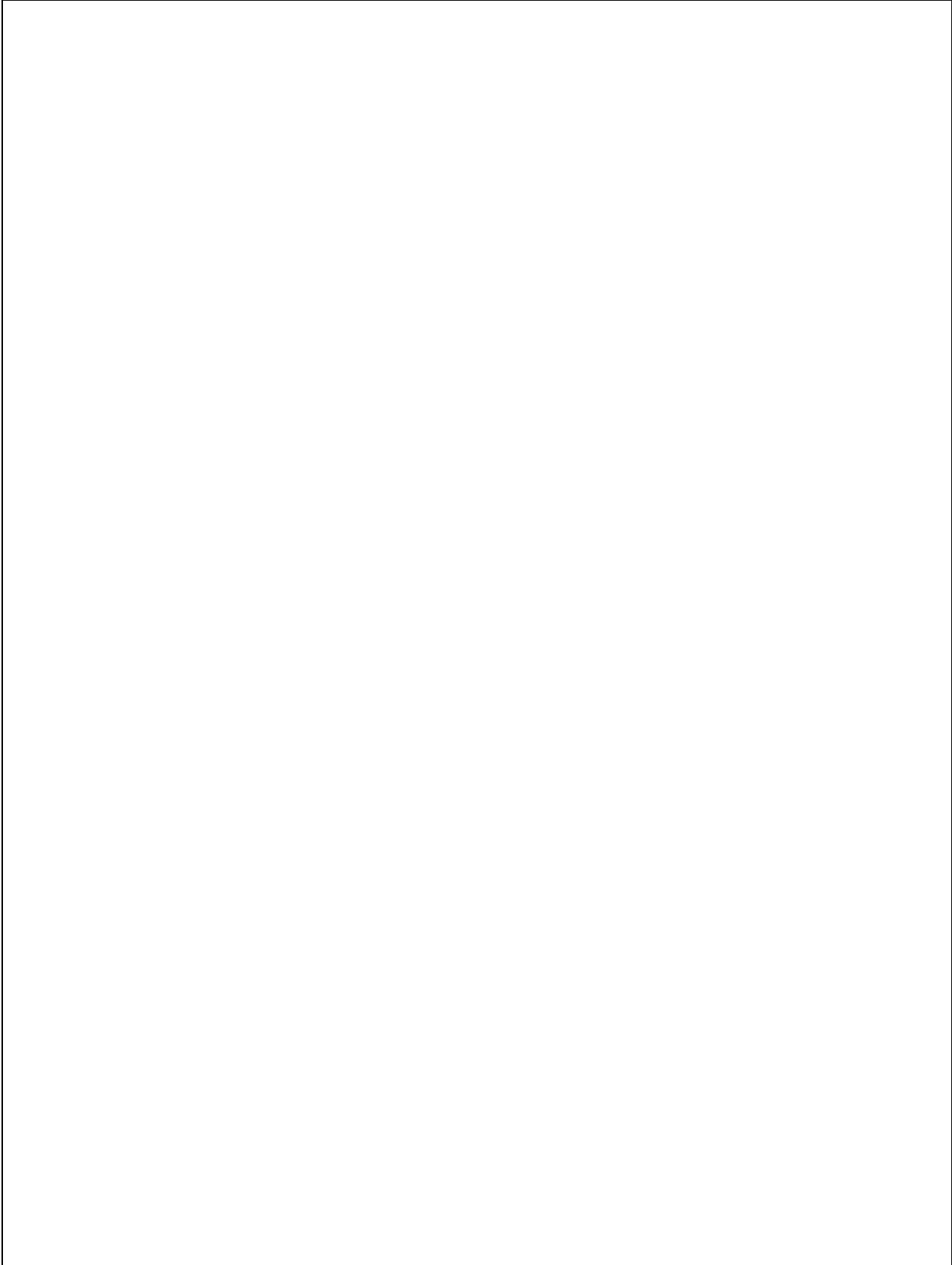
כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (27 נק') הוכיחו משפט ערך הביניים: תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו-
 $f(a) < 0, f(b) > 0$. אזי $\exists c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = 0$.



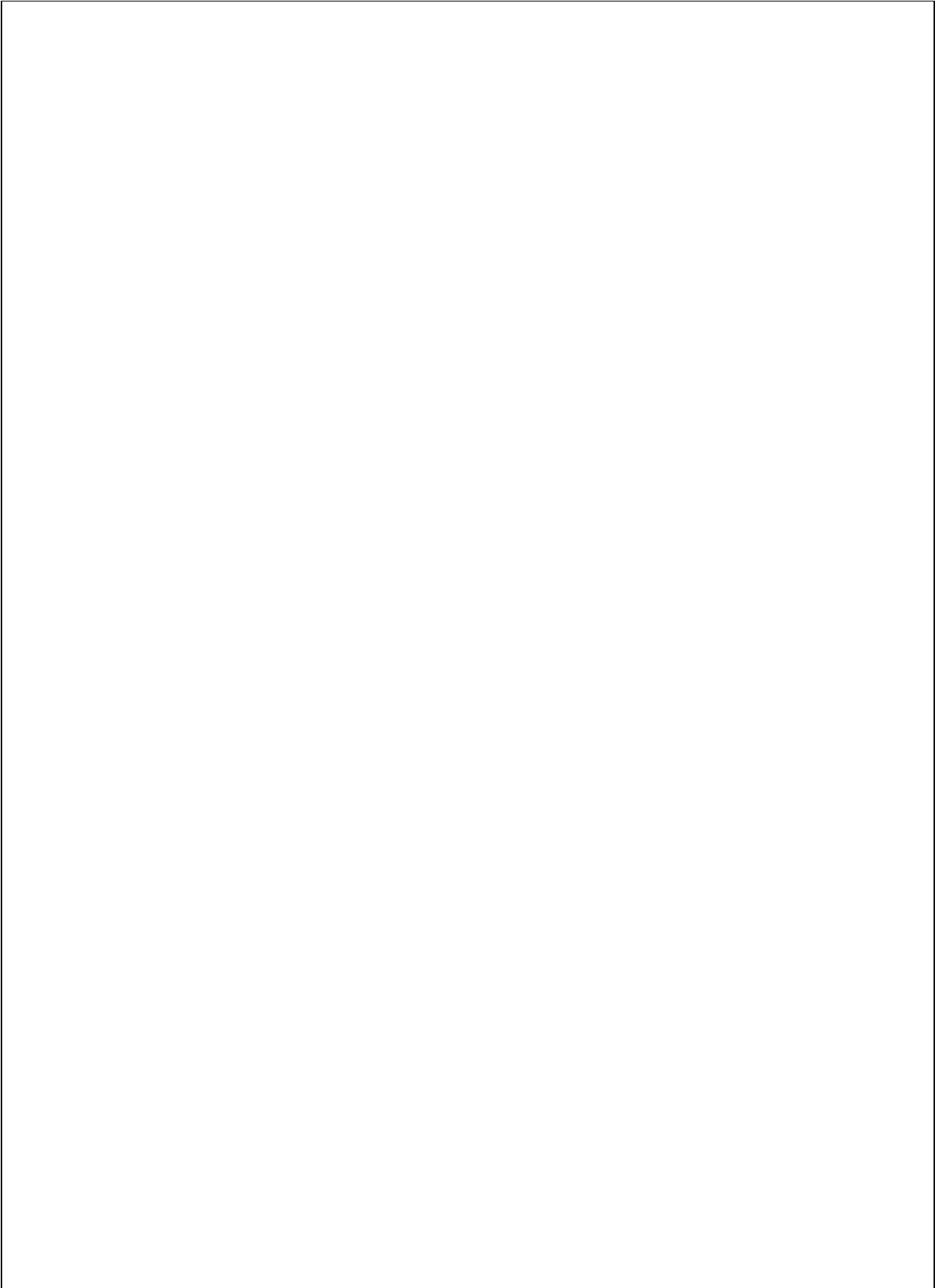
שאלה 2. (א) (14 נק') תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת: קיים $0 < \lambda < 1$ כך ש-
 $|a_{n+1} - a_n| \leq \lambda |a_n - a_{n-1}|, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

(ב) (13 נק') נתון ש- $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$. (i) הוכיחו כי אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס. (ii) אם בנוסף הסדרה (a_n) מונוטונית, הוכיחו כי הכיוון ההפוך גם נכון.



שאלה 3. (א) (14 נק') נגדיר סדרה לפי $a_1 = 1$ ו- $a_{n+1} = \ln(e^{a_n} - a_n)$ לכל n טבעי. האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס? אם כן, חשבו את ערכו.
רמז: בתור התחלה הוכיחו כי הסדרה יורדת וחסומה מלמטה.

(ב) (13 נק') תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים שמתאפסת בלפחות שבע נקודות שונות. הוכיחו שהפונקציה $f + 6f' + 9f''$ מתאפסת בלפחות חמש נקודות שונות.
רמז: תגדירו פונקציית עזר $g(x) = 9e^{x/3}f(x)$.



שאלה 4. (א) (נק' 14) נתונות שתי פונקציות f, g על \mathbb{R} רציפות בנקודה $x=c$. נגדיר את הפונקציה

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

הוכיחו: רציפה ב- $x=c$ אם ורק אם $f(c) = g(c)$.

(ב) (נק' 13) תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- $[0,1]$ וגזירה ב- $(0,1)$, כך ש- $f(0) = 0$. הראו שאם f' היא מונוטונית עולה ב- $(0,1)$ אז גם הפונקציה $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ מונוטונית עולה ב- $(0,1)$.

