אוניברסיטת תל-אביב
פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ג, מועד א'
תאריך: 20.07.2023

<u>מבחן סוף סמסטר ב"חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א"</u>

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

<u>הנחיות</u>

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסויים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הינכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

ב ה צ ל ח ה !

<u>שאלה 1</u>. (27 נק׳) הוכיחו משפט על תנאי מספיק לקיום קיצון: תהי $f: I \to \mathbb{R}$, כאשר I קטע פתוח ותהי נקודה $x_0 \in I$. נניח $\exists f''(x_0)$ וכי $f'(x_0) = 0$. אזי אם $f''(x_0) > 0$ אז x_0 נקודת מינימום מקומי ״חזק״, כלומר קיימת סביבה מנוקבת סביב x_0 שבה $f(x) > f(x_0)$.

<u>שאלה 2</u>. (א) (14 נק׳) נגדיר סדרה לפי $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}$ ו- $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sin(a_n)}$ לכל n טבעי. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

(ב) (13 נק׳) תהי $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים כך ש- $f''(x) > 0$ ב-$(0,\infty)$.
הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $2(f(2x) - f(x)) < f(4x) - f(2x)$.

<u>שאלה 3.</u> (27 נק') תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך שקיים $\lambda<1$ עבורו לכל x ממשי מתקיים $|f'(x)|<\lambda$. נניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה המקיימת $a_{n+1}=f(a_n)$ לכל n טבעי. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת בשני המקרים האפשריים:

(i) קיים n_0 טבעי כך ש-$a_{n_0+1}=a_{n_0}$; (ii) $a_{n+1}\neq a_n$ לכל n טבעי.

<u>שאלה 4</u>. **(א) (14 נק׳)** תהי $f: I \to \mathbb{R}$ רציפה, כאשר I קטע פתוח, וגזירה ב- $a \in I$, כך ש- $f(a) > 0$. חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n = L$.

(ב) (13 נק׳) יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי (כל $0 < a_n$) מתבדר. הראו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(S_n)^2}$ מתכנס, כאשר $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ סכום חלקי של הטור המקורי.