16 באפריל 2024

מבחן בחדו"א 1א

מועד א', סמסטר א' תשפ"ד, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' יעקב יעקובוב, פרופ' אסף נחמיאס, פרופ' ארז פייטן

משך הבחינה שלוש שעות. אם אינכם יודעים לפתור סעיף מסוים נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 2 נקודות עבור הסעיף. בבחינה 4 שאלות והניקוד עבור כל שאלה הוא 27 נקודות. סך כל הנקודות בבחינה 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.

אנא כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את התשובות, ואל תחרגו מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הנכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה. **אין להשתמש בשום חומר עזר**.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

1. א. (12 נק') צטטו את משפט ויירשטראס לגבי פונקציה רציפה על קטע סגור.

ב. (15 נק') הוכיחו כי אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ו- $f(x)>0$ לכל $x\in[a,b]$ אז יש $c>0$ כך $f(x)>c$ לכל $x\in[a,b]$.

2. א. (13 נק') יהיו $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות. הוכיחו כי הפונקציה $g(x)=\min(f_1(x),f_2(x))$ רציפה ב-$\mathbb{R}$.

ב. (14 נק') יהיו $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות ונניח כי $f_1(x_0)=f_2(x_0)$ עבור $x_0\in\mathbb{R}$ מסויים. הוכיחו כי $g(x)=\min(f_1(x),f_2(x))$ גזירה ב- x_0 אם ורק אם $f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$.

3. א. (13 נק') תהא a_n סדרה המוגדרת על ידי $a_1 = \frac{1}{2}$ ו- $a_{n+1} = \sin(a_n^2)$. הוכיחו כי $a_n \to 0$.

ב. (14 נק') תהי f פונקציה בעלת נגזרת שלישית רציפה בקטע $[-1,1]$. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left[nf(\frac{1}{n}) - nf(-\frac{1}{n}) - 2f'(0) \right]$ מתכנס.

4. א. (13 נק') תהא a_n סדרה חיובית המקיימת $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+2024}}{a_n} < 1$. הוכיחו כי $a_n \to 0$.

ב. (14 נק') מצאו סדרה חיובית a_n המקיימת $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+2024}}{a_n} < 1$ וגם $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$. הוכיחו שהסדרה שמצאתם מקיימת שתי תכונות אלו.

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):