

אוניברסיטת תל-אביב פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ד, מועד א'
תאריך: 01.09.2024

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הנכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

ב ה צ ל ח ה !

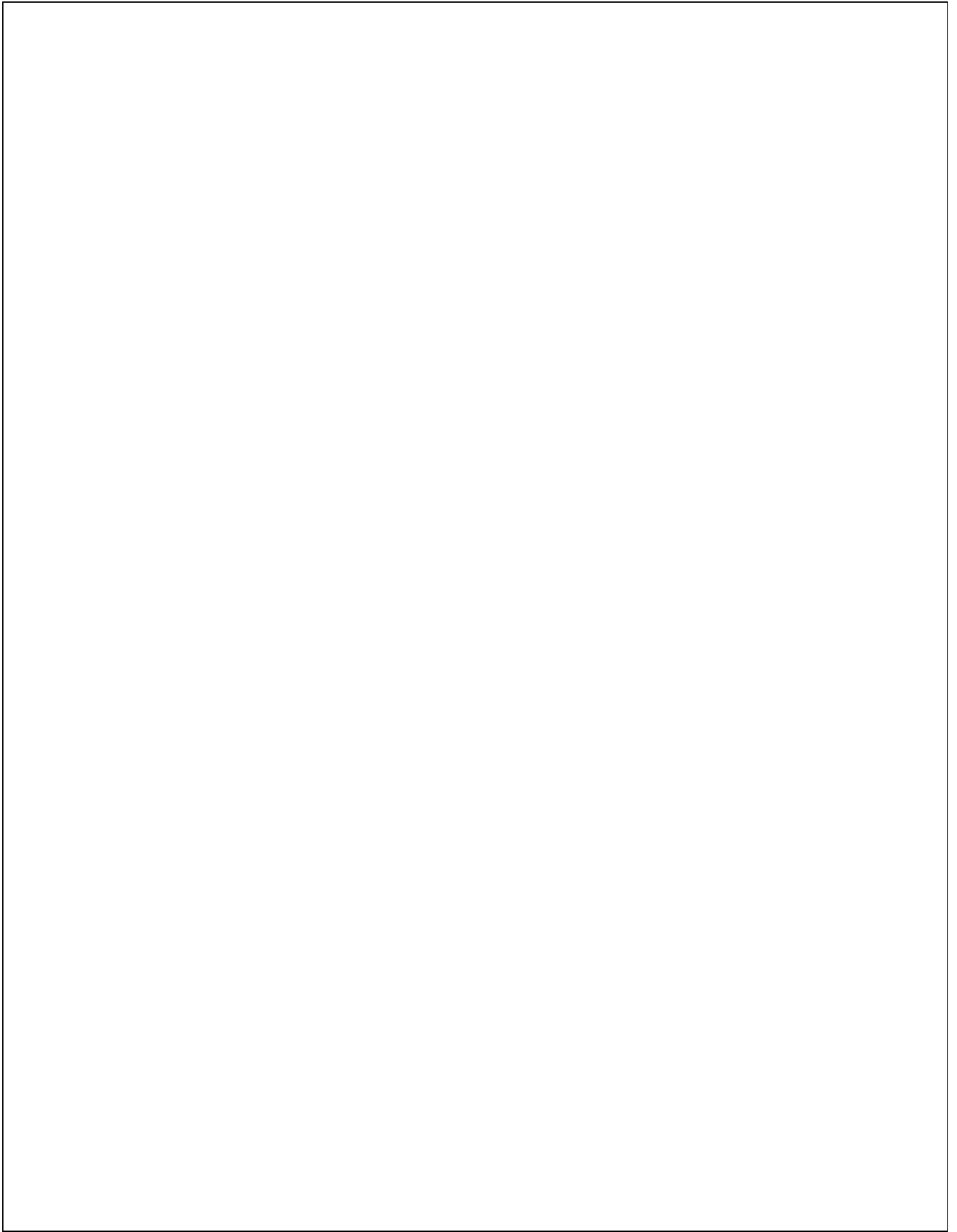
כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (27 נק') הוכיחו משפט על תנאי מספיק לקיום קיצון: תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, כאשר I קטע פתוח ותהי נקודה $x_0 \in I$. נניח $\exists f''(x_0)$ וכי $f'(x_0) = 0$. אזי אם $f''(x_0) > 0$ אז x_0 נקודת מינימום מקומי "חזק", כלומר קיימת סביבה מנוקבת סביב x_0 שבה $f(x) > f(x_0)$.

שאלה 2. (א) (13 נק') הפריכו ע"י דוגמא נגדית: נתונה פונקציה ממשית h רציפה ב-0 ו- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2} = 0$.

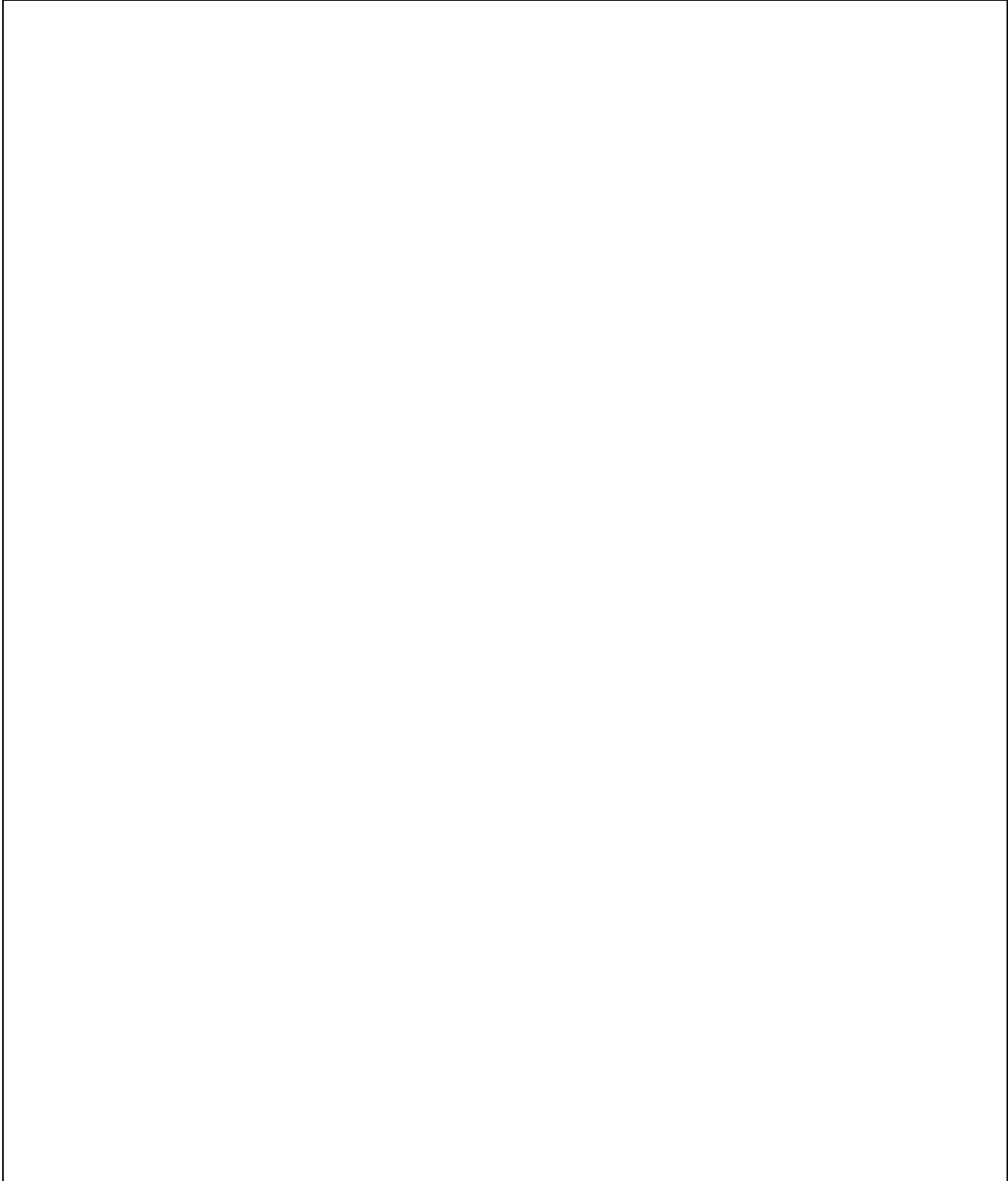
אזי הפונקציה גזירה פעמיים ב-0 ו- $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$.

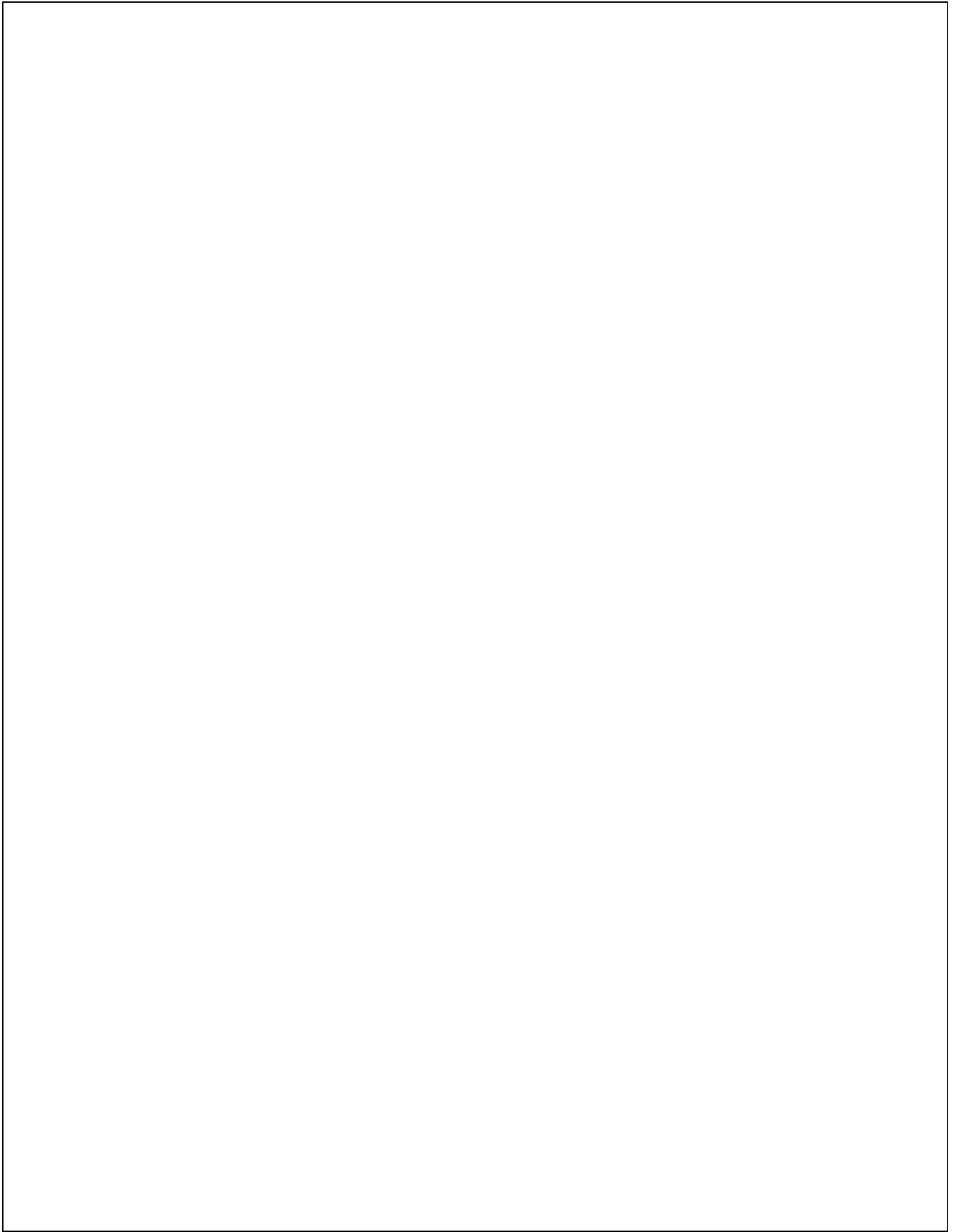
(ב) (14 נק') תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. הוכיחו: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.



שאלה 3. (א) (14 נק') תהי סדרה חיובית. הוכיחו כי $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(ב) (13 נק') תהי סדרה חיובית וחסומה. הוכיחו כי לכל $c \in (0,1)$ יש אינסוף אינדקסים n -ים עבורם $ca_n - 1 + c < a_{n+1}$.
רמז: כאופציה, ניתן להגדיר סדרה $b_n = 1 + a_n$ ולהשתמש עבודה בסעיף א'.





שאלה 4. תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- $[0,1]$ וגזירה ב- $(0,1)$. נניח כי $f(0) = 0$ וכי לכל $x \in (0,1)$ מתקיים $|f'(x)| \leq x$.

(א) (14 נק') הוכיחו כי לכל $x \in [0,1]$ מתקיים $|f(x)| \leq x^2$.

(ב) (13 נק') הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)$ מתכנס בהחלט.

