

אוניברסיטת תל-אביב פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ד, מועד ב'
תאריך: 14.10.2024

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1א

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, ואין דף נוסחאות.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הנכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

| מספר שאלה | ציון |
|-----------|------|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

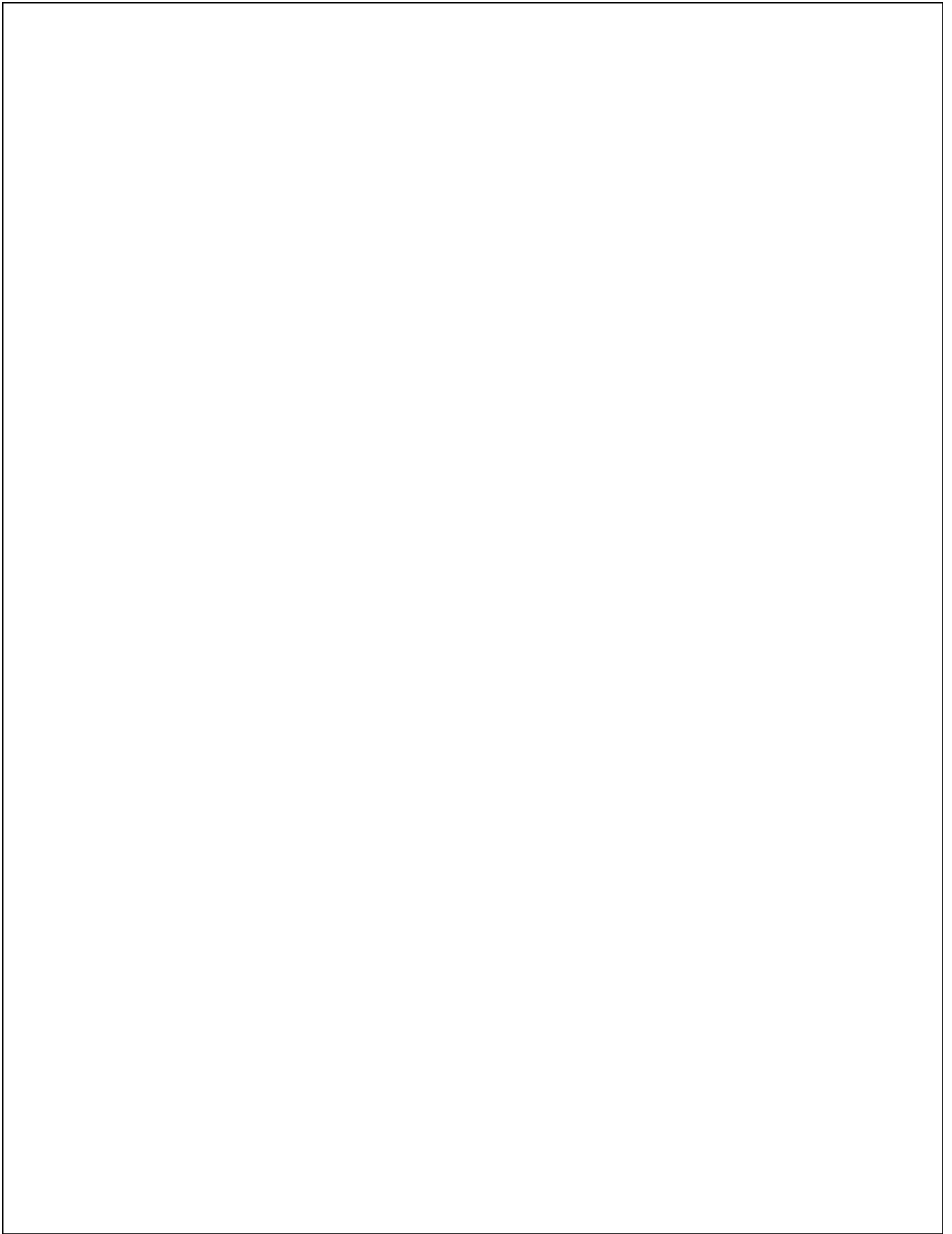
ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

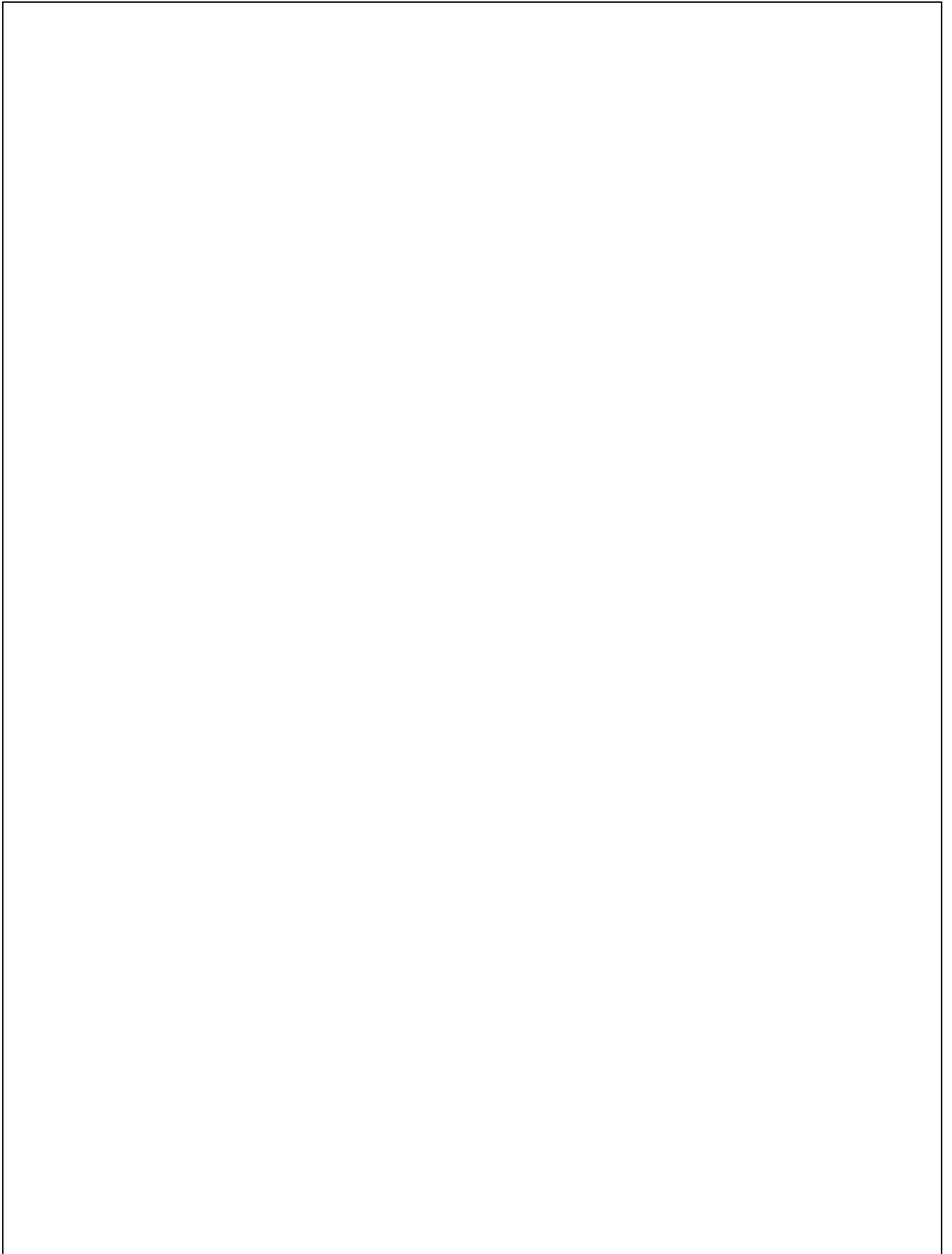
שאלה 1. (27 נק') הוכיחו משפט ערך הביניים: תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ו-
 $f(a) < 0, f(b) > 0$. אזי $\exists c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = 0$.

שאלה 2. (א) (13 נק') נתונה סדרה $a_n = \sqrt{n+1} - a\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, כאשר a מספר ממשי. עבור אילו ערכי a הסדרה מתכנסת במובן הרחב ועבור אילו במובן הצר (לגבול סופי)? הוכיחו זאת.

(ב) (14 נק') תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$. הוכיחו כי f אינה רציפה במ"ש ב- $(0, \infty)$.



- שאלה 3.** תהי סדרה (x_n) חיובית כך שקיים (כלומר סופי) הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n)$.
- (א) (14 נק') יהי $a > 0$. עבור אילו ערכי a הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a^{x_n}$ מתכנס או מתבדר? הוכיחו זאת.
- (ב) (13 נק') תהי $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה. נניח כי $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x f(x) = 1$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ מתכנס.



שאלה 4. (א) (14 נק') תהי סדרה שמוגדרת לכל n טבעי באופן הבא:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת לגבול $\frac{1}{2} < L \leq 1$.

(ב) (13 נק') תהי פונקציה ממשית f אי-שלילית וגזירה פעמיים בסביבת הנקודה 0. נתון כי $f(0) = 0$. הוכיחו כי $f''(0) \geq 0$.

