

מבחן בחדו"א 1א

מועד ב', סמסטר א' תשפ"ה, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' יעקב יעקובוב, פרופ' אסף נחמיאס, פרופ' ארז פייטן

משך הבחינה שלוש שעות. אם אינכם יודעים לפתור סעיף מסוים נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור, לסמן "אינני יודע/ת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 2 נקודות עבור הסעיף. בבחינה 4 שאלות והניקוד עבור כל שאלה הוא 27 נקודות. סך כל הנקודות בבחינה 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.

אנא כתבו באופן ברור, מלא וקפדני את התשובות, ואל תחרגו מהמסגרות המוקצות לכל שאלה. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון. יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד.

עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הנכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה. **אין להשתמש בשום חומר עזר.**

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

בהצלחה!

1. א. (12 נק') צטטו את משפט רול.

ב. (15 נק') נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ גזירה ב- \mathbb{R} כך ש- $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. הוכיחו כי הנגזרת f' מתאפסת בלפחות חמש נקודות שונות.

2. א. (13 נק') תהא $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ויהי $k \geq 1$ מספר טבעי. נניח כי מתקיים $|f(x) - \cos(\pi kx)| \leq 1 - \frac{1}{2025}$ לכל $x \in [0, 1]$. הוכיחו כי יש לפחות k מספרים שונים ב- $[0, 1]$ בהם f מתאפסת.

ב. (14 נק') תהא הסדרה $a_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$ המוגדרת לכל $n \geq 1$. הוכיחו כי הסדרה $\{na_n\}_{n \geq 1}$ חסומה.

3. א. (13 נק') תהא סדרה המקיימת $a_{2n} = (a_n)^2$ לכל n טבעי. הראו כי לפחות אחד משלושת הבאים הוא גבול חלקי של הסדרה:
0, 1 או $+\infty$.

ב. (14 נק') מצאו סדרה a_n המקיימת $a_{2n} = (a_n)^2$ לכל n טבעי, וש-7 הינו גבול חלקי של הסדרה.

4. א. (13 נק') הראו כי $e^x \geq x^e$ לכל $x \geq 0$.

ב. (14 נק') נתונים מספרים a_0, a_1, \dots, a_n המקיימים $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ הוכיחו כי יש $x \in (0, 1)$ המקיים $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$.

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):

במידת הצורך רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):