

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשע"ה, מועד א'
תאריך: 03.02.2015

מבחן סוף סמסטר ב' "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות.
- חומר עזר מותר:
- 1. דף נוסחאות אחד (דו-צדדי) אישי בגודל A4 כתוב בכתב יד אישי.
- 2. מחשבון כיס רגיל (לא גרפי, לא ניתן לתכנות).
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי, מחשב כף יד או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- אין להשתמש בשיטות אשר לא נלמדו בקורס.

מבנה הבחינה

- יש לענות על 4 מתוך 6 השאלות: שאלה אחת מחלק א' ושלוש שאלות מחלק ב'.
- תשובה מלאה, נכונה ומנומקת תזכה ב 25 נקודות.
- יש לרשום בראש המחברת הראשונה את מספרי השאלות שנפתרו.

ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

חלק א' – יש לפתור שאלה אחת מתוך שתיים

שאלה 1. להוכיח או להפריך:

(א) (15 נק') לכל סדרת מספרים $\{a_n\}$ אם קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n) \neq 0$ אז קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(ב) (10 נק') אם הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

שאלה 2. (א) (15 נק') נניח פונקציה $f(x)$ רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) כאשר $0 < a < b$. נניח גם כי

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}. \text{ להוכיח שקיים פתרון למשוואה } \frac{f(x)}{x} = f'(x) \text{ ב-} (a, b).$$

(ב) (10 נק') נתונות פונקציות $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = \sqrt{-x}$. למצוא פונקציות $h_1(x) = f(g(x))$ ו- $h_2(x) = g(f(x))$ כולל תחום ההגדרה שלהן.

חלק ב' – יש לפתור שלוש שאלות מתוך ארבע

שאלה 3. (25 נק') לחקור ולשרטט את גרף הפונקציה $y = f(x) = x \ln |x|$ לפי הסעיפים: תחום ההגדרה, נקודות החיתוך עם הצירים, זוגיות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון מקומי, תחומי קמירות כלפי מעלה ומטה, נקודות פיתול, אסימפטוטות, גרף.

שאלה 4. (א) (14 נק') נתונה סדרה $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$. להוכיח כי הסדרה מתכנסת.

(ב) (11 נק') להוכיח כי עבור $0 < x < 1$ מתקיים $x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

שאלה 5. (א) (11 נק') לבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos n}{n^{3.5} + 1}$ מתכנס/מתבדר.

(ב) (14 נק') לחשב את האינטגרל הלא מסוים $\int \frac{x^3 + x}{x^2 + x + 1} dx$.

שאלה 6. (א) (13 נק') האם האינטגרל $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(\ln x)} dx$ מתכנס/מתבדר?

(ב) (12 נק') כמה פתרונות יש למשוואה $\ln x - x + 2 = 0$ ב- $(0, +\infty)$? לנמק!