

# אוניברסיטת תל-אביב

## פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשע"ה, מועד א'  
תאריך: 26.01.2016

### מבחן סוף סמסטר ב"חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

#### הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות.
- חומר עזר מותר:
- 1. דף נוסחאות אחד (דו-צדדי) אישי בגודל A4 כתוב בכתב יד אישי.
- 2. מחשבון כיס רגיל (לא גרפי, לא ניתן לתכנות).
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי, מחשב כף יד או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- אין להשתמש בשיטות אשר לא נלמדו בקורס.

#### מבנה הבחינה

- יש לענות על 4 מתוך 6 השאלות: שאלה אחת מחלק א' ושלוש שאלות מחלק ב'.
- תשובה מלאה, נכונה ומנומקת תזכה ב 25 נקודות.
- יש לרשום בראש המחברת הראשונה את מספרי השאלות שנפתרו.

**ב ה צ ל ח ה !**

כל הזכויות שמורות ©  
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

## חלק א' – יש לפתור שאלה אחת מתוך שתיים

**שאלה 1.** להוכיח או להפריך:

(א) (6 נק') אם  $a_n \neq 0$  והסדרה  $\frac{a_n}{b_n}$  מתכנסת אז הסדרה  $\frac{b_n}{a_n}$  מתכנסת.

(ב) (13 נק') אם הטור המספרי  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$  מתכנס ( $a_n \geq 0$ ) אז גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס.

(ג) (6 נק') אם הטור המספרי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס ( $a_n \geq 0$ ) אז גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$  מתכנס.

**שאלה 2.** (א) (17 נק') למצוא את רדיוס וקטע ההתכנסות (כולל קצוות הקטע) של הטור החזקות

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} \text{ ולחשב את } f(x). \text{ רמז: כדי לחשב } f(x), \text{ קודם לחשב } F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ואז  $f(x) = F'(x)$ .

(ב) (8 נק') נתונה פונקציה  $f(x)$  המוגדרת בסביבת הנקודה  $x=0$ . נסמן  $g(x) = x f(x)$ . למצוא תנאי מספיק והכרחי על  $f(x)$  כך שתהיה קיימת הנגזרת  $g'(0)$  לפי הגדרת נגזרת.

## חלק ב' – יש לפתור שלוש שאלות מתוך ארבע

**שאלה 3.** (25 נק') לחקור ולשרטט את גרף הפונקציה  $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{(x+1)^2}$  לפי הסעיפים:

תחום ההגדרה, נקודות החיתוך עם הצירים, זוגיות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון מקומי, תחומי קמירות כלפי מעלה ומטה, נקודות פיתול, אסימפטוטות, גרף.

**שאלה 4.** (א) (14 נק') להוכיח כי הסדרה  $a_n = \frac{\sin e}{1 \cdot 3} + \frac{\sin e^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{\sin e^n}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$  מתכנסת.

(ב) (11 נק') לחשב את הגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$ .

**שאלה 5.** (א) (14 נק') נתונה פונקציה  $f(x) = \begin{cases} \ln^3(2x), & 0 < x \leq \frac{e}{2}, \\ 2ax + 1 - ae, & x > \frac{e}{2}. \end{cases}$  עבור איזה  $a$

הפונקציה גזירה לכל  $x > 0$ ? לרשום נוסחה של  $f'(x)$  לכל  $x > 0$  עבור  $a$  הזה.

(ב) (11 נק') לחשב את האינטגרל הלא מסוים  $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx$ .

**שאלה 6.** (א) (15 נק') לחשב  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^2}$  ו-  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)^2}{t}$  ואת האינטגרל הלא אמיתי  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} (\ln x)^2 dx$ .

(ב) (10 נק') ל-  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$  לרשום נוסחת טיילור ב-  $a=1$  עבור  $n=1$ , כלומר

שארית לגרנז' מכילה נגזרת השנייה, ולתת הערכת השארית כאשר  $|x-1| \leq \frac{1}{2}$ .