

# אוניברסיטת תל-אביב

## פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשע"ה, מועד ב'  
תאריך: 04.03.2016

### מבחן סוף סמסטר ב' "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ב1"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

#### הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות.
- חומר עזר מותר:
- 1. דף נוסחאות אחד (דו-צדדי) אישי בגודל A4 כתוב בכתב יד אישי.
- 2. מחשבון כיס רגיל (לא גרפי, לא ניתן לתכנות).
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי, מחשב כף יד או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- אין להשתמש בשיטות אשר לא נלמדו בקורס.

#### מבנה הבחינה

- יש לענות על 4 מתוך 6 השאלות: שאלה אחת מחלק א' ושלוש שאלות מחלק ב'.
- תשובה מלאה, נכונה ומנומקת תזכה ב 25 נקודות.
- יש לרשום בראש המחברת הראשונה את מספרי השאלות שנפתרו.

**ב ה צ ל ח ה !**

כל הזכויות שמורות ©  
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך  
שהיא, בין מכנית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

## חלק א' – יש לפתור שאלה אחת מתוך שתיים

**שאלה 1. (א) (10 נק')** להוכיח או להפריך: אם  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$  ו-  $g(x)$  חסומה בסביבה של  $a$  אז

קיים  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ . מהי התשובה אם היה נתון  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ? אין צורך בהוכחה

במקרה הזה.

**(ב) (15 נק')** למצוא את רדיוס וקטע ההתכנסות (כולל קצוות הקטע) של הטור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+3)^n}{n \cdot 3^{n/2}}$$

**שאלה 2. (א) (17 נק')** נתונות שתי סדרות המתכנסות:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  ו-  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ . האם קיים גבול

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n b_n)$ ? אם כן, להוכיח לפי הגדרת קושי. אם לא, להביא דוגמה נגדית. הערה:

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \text{ לכל מספרים ממשיים } x \text{ ו- } y.$$

**(ב) (8 נק')** להוכיח או להפריך: נתון שהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס והטור  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  מתבדר. אז

$$\text{הטור } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \text{ מתבדר.}$$

## חלק ב' – יש לפתור שלוש שאלות מתוך ארבע

**שאלה 3. (25 נק')** לחקור ולשרטט את גרף הפונקציה  $y = f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}$  לפי הסעיפים:

תחום ההגדרה, נקודות החיתוך עם הצירים, זוגיות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון מקומי, תחומי קמירות כלפי מעלה ומטה, נקודות פיתול, אסימפטוטות, גרף.

**שאלה 4. (א) (14 נק')** להוכיח כי למשוואה  $x^3 \tan x + x \sin x = a$  קיים פתרון בקטע  $(0, \pi/2)$ . כאן  $a > 0$  מספר קבוע. האם הפתרון הוא יחיד בקטע זה?

**(ב) (11 נק')** לבדוק האם הסדרה  $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$  מתכנסת/מתבדרת.

**שאלה 5. (א) (11 נק')** לבדוק האם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$  מתכנס/מתבדר.

**(ב) (14 נק')** שטח הכלוא בין  $y = x$  ו-  $y = x^2$  בקטע  $[0, 1]$  מסובבים סביב ציר ה- $x$  וסביב ציר ה- $y$ . לחשב נפחים של שני הגופי הסיבוב.

**שאלה 6. (א) (14 נק')** האם האינטגרלים הלא אמיתיים  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  ו-  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+3} dx$  מתכנסים או

מתבדרים? לחשב את האינטגרל הלא אמיתי  $\int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx$ .

**(ב) (11 נק')** לחשב את הגבול  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \right)^{x/\ln x}$ .