ט״ז בשבט תשע״ט **22.1.2019**

מבחן בחדו״א 1ב (0366.1121)
סמסטר א׳ תשע״ט
פרופ׳ יעקב יעקובוב, ד״ר אלי להר

מועד א

משך המבחן: שלוש שעות.

ללא חומר עזר. (מחשבון פשוט (לא גרפי) מותר ומיותר).

ענו על כל השאלות.

שווי השאלות במבחן 105 נק׳, אולם הציון לא יעלה על 100.

הקפידו **לפרט ולהסביר** את צעדיכם **ולבדוק** את התשובות, אם ניתן.

תשובות ללא נימוק או הסבר לא תיבדקנה!

התשובה ״לא יודע/ת״ (ללא פירוט נוסף) תזכה ב-20% מערך השאלה.

טענות שגויות בתשובה תגרומנה להפחתה בניקוד התשובה.

ניתן להשתמש בתוצאות של סעיפים קודמים בשאלה, גם אם לא עניתם עליהם.

בהצלחה!

שימו לב:

יש לענות על השאלות בדפים המצורפים בלבד.
מחברת המבחן תשמש לטיוטה בלבד והיא <u>לא תיבדק</u>.

שאלה 1:
(25 נקודות)

תהי f פונקציה ממשית המוגדרת לכל $x \geq 1$.

נסמן: $a_n = f\left(n\right)$.

א. (10 נקי) הוכיחו או הפריכו: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = 0$.

ב. נניח כי f יורדת בקטע $[1,\infty)$ וכי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. הוכיחו:

1. (5 נקי) f חיובית בקטע $[1,\infty)$.
2. (5 נקי) $\lim_{x\to\infty} f\left(x\right) = 0$.
3. (5 נקי) הפונקציה $g\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(n+x\right)$ מוגדרת לכל $x \in [0,\infty)$.

שאלה 2:
(20 נקודות)

קבעו לכל טענה האם היא נכונה. נמקו בקצרה.
אין צורך להוכיח מחדש משפטים שנלמדו בכיתה.

בכל הטענות f היא פונקציה ממשית המוגדרת בקטע $\left[a,b\right]$ ו- $a < c < b$.

א. אם $x = c$ קיצון מקומי של f, אזי $f'\left(c\right) = 0$.

ב. אם $f'\left(c\right) = 0$ אזי $x = c$ היא נקודת קיצון מקומי של f.

ג. אם $x = c$ נקודת פיתול של f ו- $f'\left(c\right)$ מוגדרת אזי $f'\left(c\right) = 0$.

ד. אם f עולה ורציפה ב-$\left[a,b\right]$ אזי $\int_a^b f\left(x\right)dx \leq \int_a^c f\left(x\right)dx$.

שאלה 3:
(15 נק')
הוכיחו כי לכל $a < b \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left|\sin e^{-b} - \sin e^{-a}\right| \le \min\left(\frac{b-a}{e^{a}}\ ,\ 2\right)$$

שאלה 4:

א. (15 נק') קבעו לאיזה $k \in \mathbb{N}$ $\int_1^{\infty} e^{-\ln^k x}\,dx$ מתכנס. נמקו.

ב. (10 נק') מצאו את **תחום ההתכנסות** של טור החזקות: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8n+1}{n+2}\right)^{n}(x-1)^{3n}$. נמקו.

שאלה 5:
(20 נק')

א. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה ממשית המוגדרת בקטע $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

ידוע כי f **רציפה ואי שלילית** בקטע וכי $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $a<x<b$.

ב. הראו כי המסקנה בסעיף א ($f(x)=0$ לכל $a<x<b$) **איננה נכונה** אם ידוע רק כי:

1. f אי שלילית ב-$[a,b]$ ו- $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ (אבל לא מניחים רציפות).

2. f רציפה ב-$[a,b]$ ו- $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ (אבל לא מניחים אי שליליות).

(כל סעיף בנפרד).

בהצלחה!