

# אוניברסיטת תל-אביב

## פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשפ"ג, מועד א'  
תאריך: 05.02.2023

### מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א'

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

#### הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, פרט לדף הנוסחאות המצורף למבחן.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה.
- עליכם לצטט במדויק כל משפט, טענה או למה מהשיעור או מהתרגול בה הנכם משתמשים. אי-ציטוט או ציטוט לא נכון יגרמו לגריעת נקודות מציון השאלה.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אין להשתמש בשיטות ובמשפטים אשר לא נלמדו בקורס.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

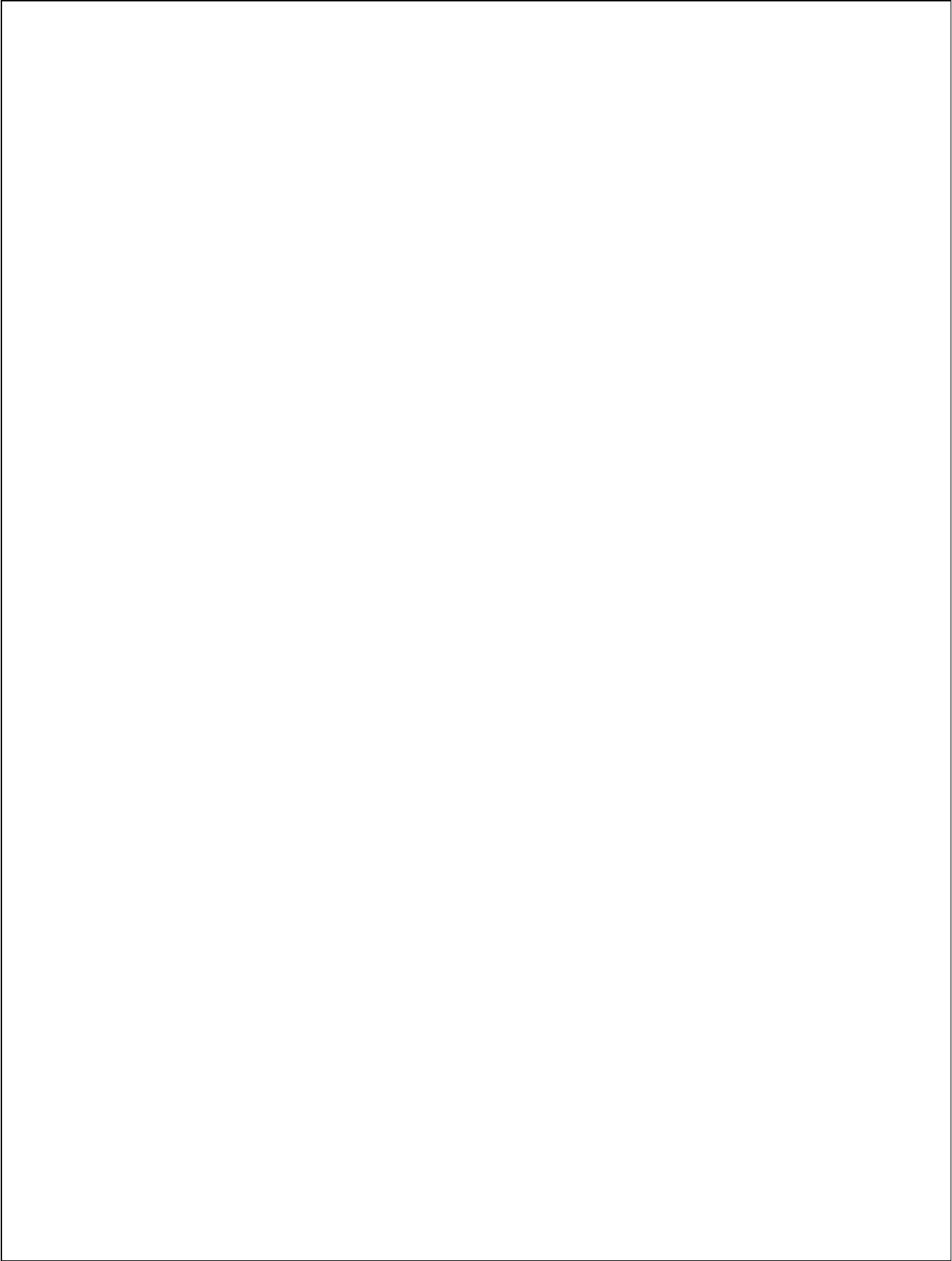
**ב ה צ ל ח ה !**

כל הזכויות שמורות ©  
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

**שאלה 1.** (27 נק') הוכיחו את משפט דיני: נניח סדרת הפונקציות רציפות  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  היא יורדת לכל  $x$  נתון ב- $[a, b]$  ומתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה  $f$  ב- $[a, b]$ . אזי ההתכנסות היא במידה שווה ב- $[a, b]$ .

**שאלה 2.** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה. הוכיחו/הפריכו (אין קשר בין הסעיפים):  
(א) (14 נק') אם  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \neq 0$  אז  $\int_0^\infty f(x) \sin(x) dx$  מתבדר.

(ב) (13 נק') אם  $\int_0^\infty |f(x)| dx$  מתכנס אז  $\int_0^\infty f^2(x) dx$  מתכנס.



**שאלה 3. (א) (15 נק') תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מחזורית במחזור  $2\pi$  ונתונה ב-  $[-\pi, \pi]$  עי"י הנוסחה**

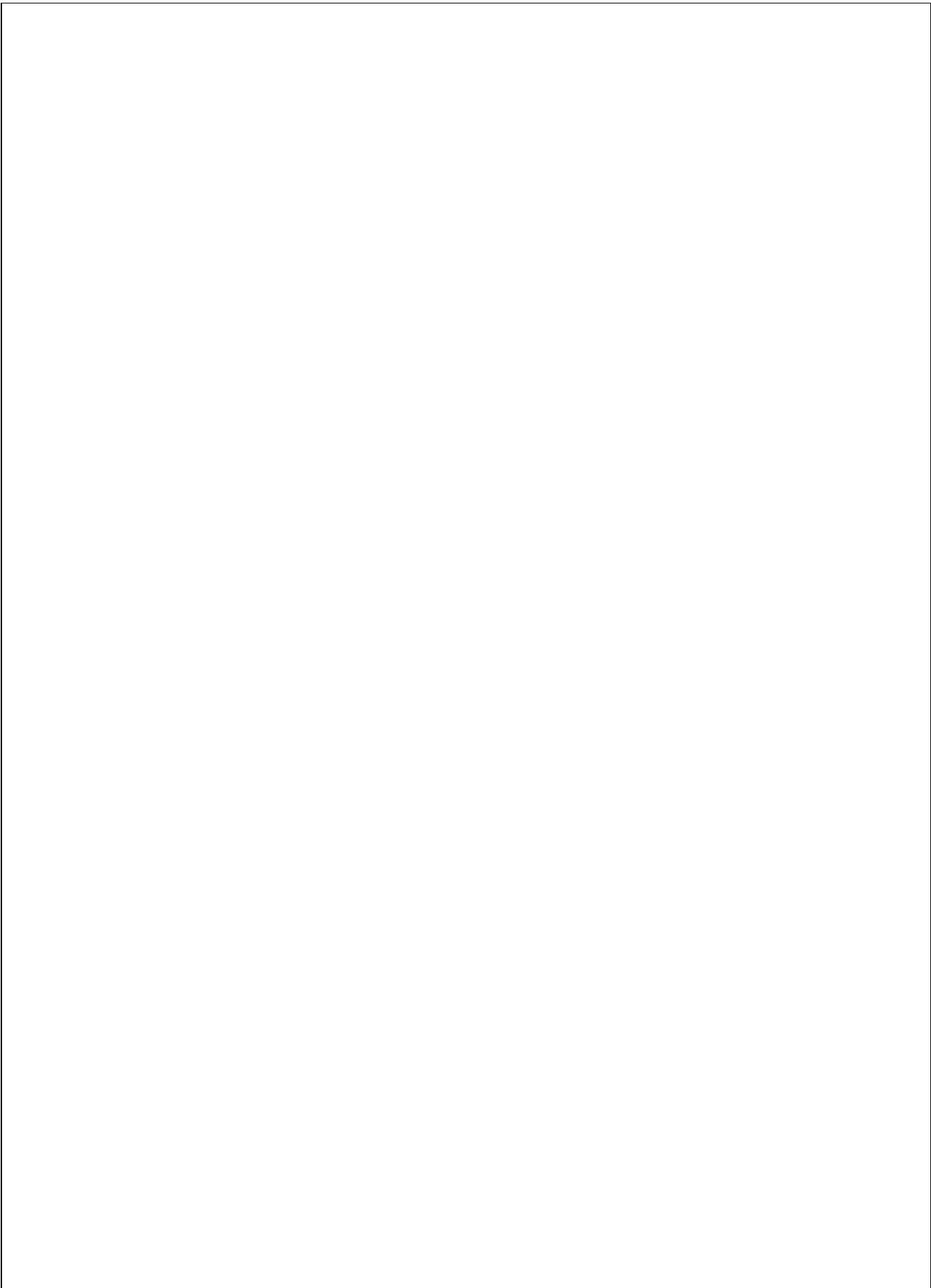
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & 0 \leq |x| < \frac{\pi}{2} \\ a|x| + b, & \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

**מצאו עבור אילו ערכים של  $a, b$  טור פוריה של  $f(x)$  מתכנס במישור  $\mathbb{R}$ -ל  $f(x)$ . הוכיחו את טענתכם.**

**(ב) (12 נק') ידוע כי אם  $f \in C(\mathbb{T})$ , כלומר  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  רציפה ו- $2\pi$  מחזורית, אז הטור עם מקדמי פוריה שלה  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))$  מתכנס. הוכיחו כי הטור**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \sin(nx)$$

**אינו טור פוריה של אף פונקציה  $f \in C(\mathbb{T})$ .**



**שאלה 4.** נתון מרחב מטרי  $X = [a, b] \times [a, b]$  עם המטריקה האוקלידית המושרית של  $\mathbb{R}^2$ .

(א) (13 נק') נתונה פונקציה רציפה  $K: X \rightarrow \mathbb{R}$ . עבור פונקציה רציפה  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  נגדיר פונקציה  $v(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy$ . הוכיחו כי  $v$  רציפה ב- $[a, b]$ .

(ב) (14 נק') נניח שלכל  $(x, y) \in X$  מתקיים  $|K(x, y)| < M$  ונניח כי  $\lambda \in \mathbb{R}$  כך ש-  
 $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ . בנוסף, נתונה פונקציה רציפה  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו שקיימת ויחידה פונקציה  $u$  רציפה ב- $[a, b]$  כך ש-  
 $u(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy$  לכל  $a \leq x \leq b$ .

