

אוניברסיטת תל-אביב פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ד, מועד ב'
תאריך: 14.10.2024

מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א

המרצים: דמיטרי פייפמן ויעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, פרט לדף הנוסחאות המצורף למבחן.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת/י" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה, אך לא יותר מ-5 נקודות על שאלה שלמה.
- יש לציין במדויק באיזה משפט או טענה אתם משתמשים.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אם משתמשים במשפטים שלא נלמדו בכיתה, יש להוכיח את המשפטים.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

ב ה צ ל ח ה !

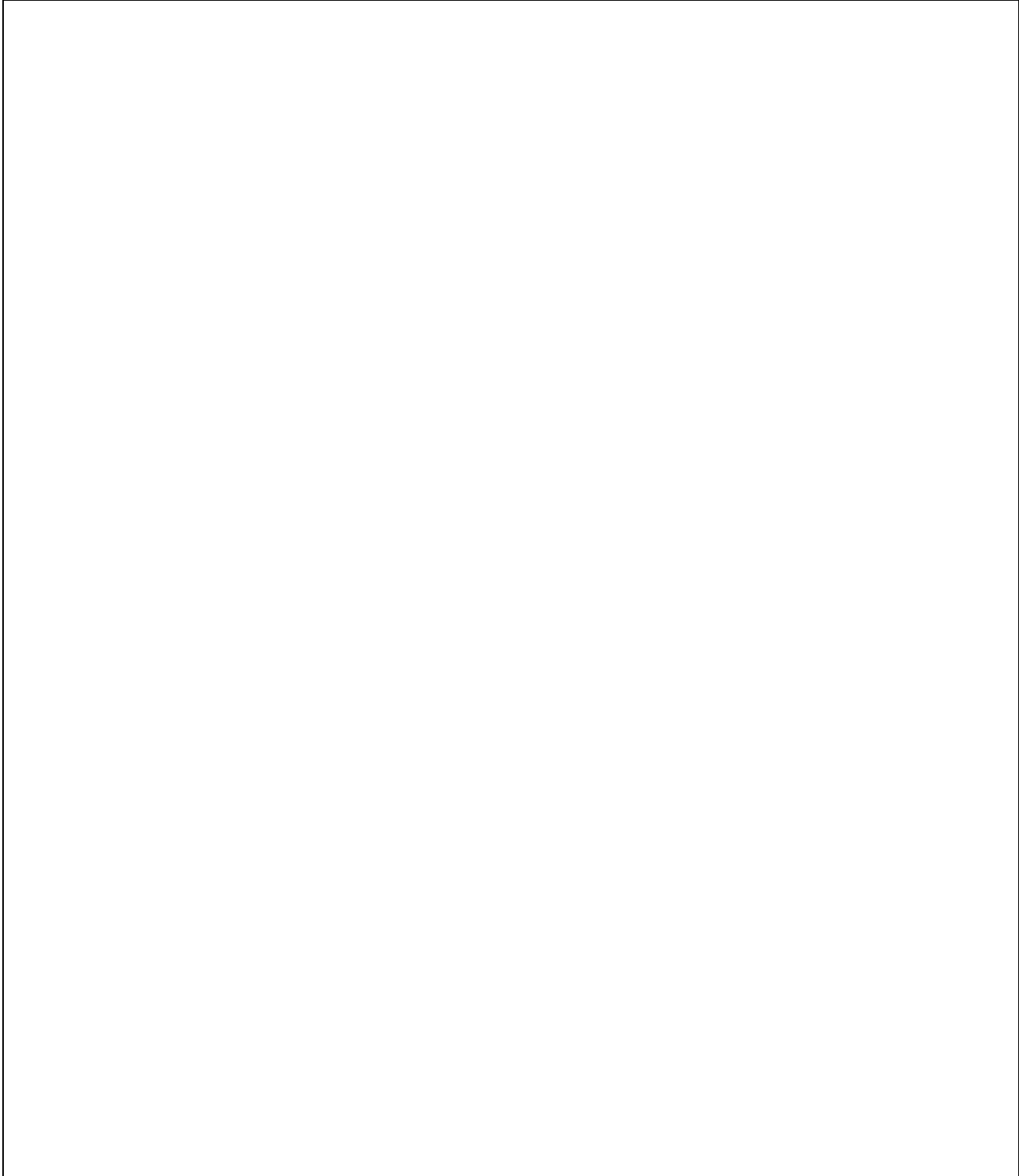
כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

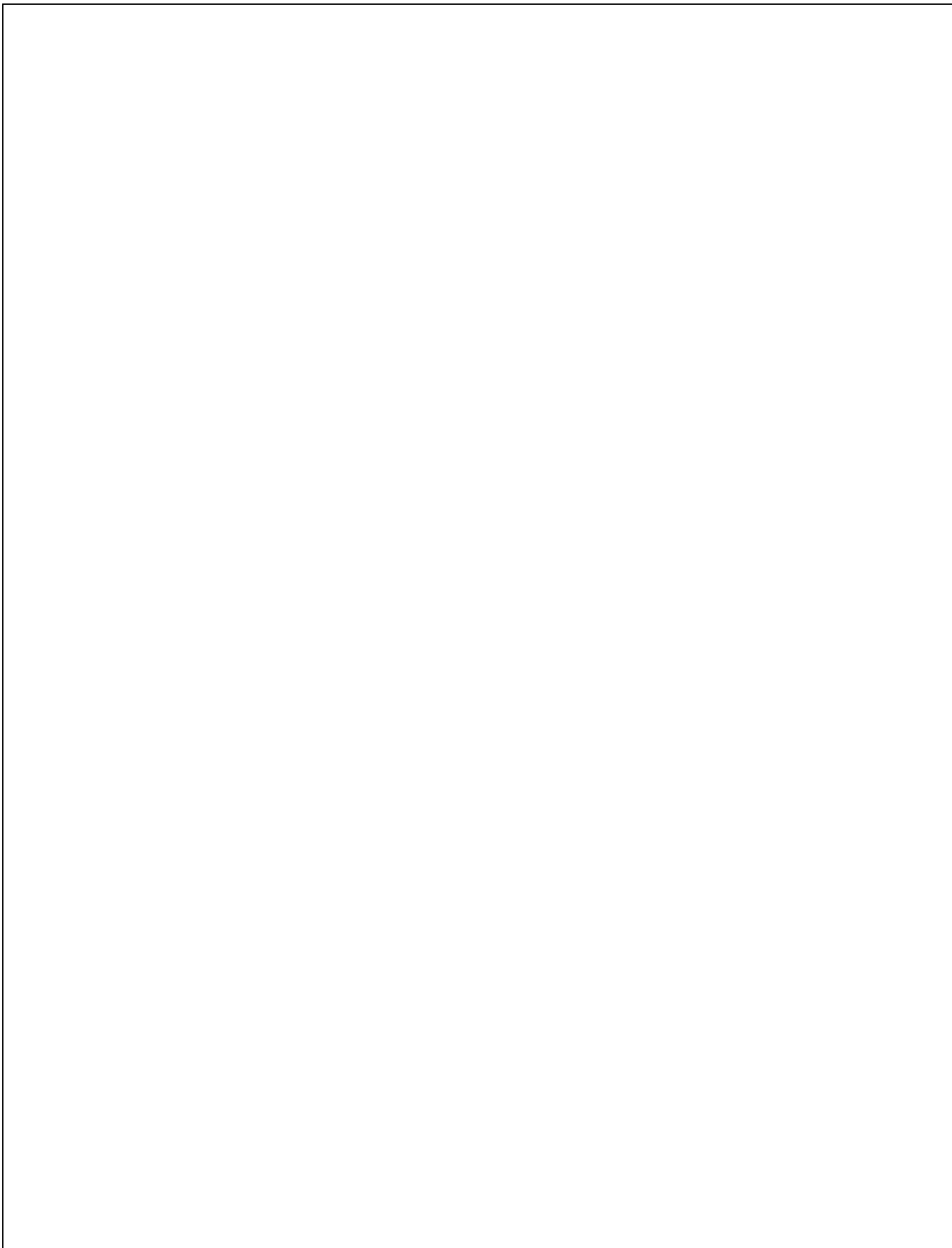
שאלה 1. (א) (נק' 14) נתונה פונקציה $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |f|^n \right)^{\frac{1}{n}} = \max_{[a,b]} |f|$$

(ב) (נק' 13) נתון: פונקציה $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה וחיובית, קיים וסופי הגבול

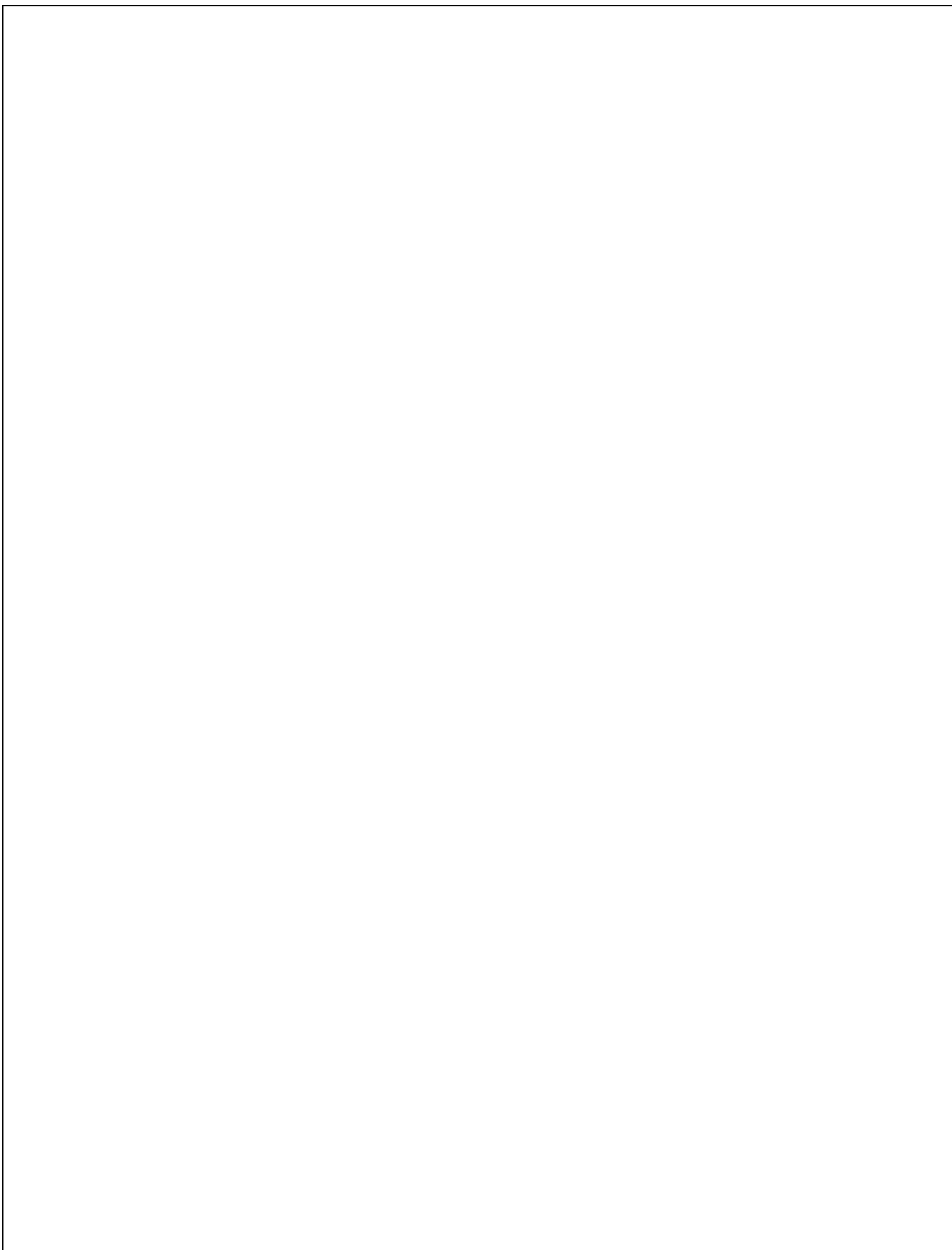
$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(f))'(x) \text{ ו- } L < 0. \text{ הוכיחו כי האינטגרל } \int_0^\infty f \text{ מתכנס.}$$





שאלה 2. נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ עי"י $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{x^2}{n}}$ לכל n טבעי.

- (א) (7 נק') מצאו את הגבול הנקודתי של f_n ב- $[0, \infty)$.
- (ב) (10 נק') האם הסדרה f_n מתכנסת במישל- f ב- $[0, 1]$?
- (ג) (10 נק') האם הסדרה f_n מתכנסת במישל- f ב- $[1, \infty)$?



שאלה 3. יהי $[a, b] \subset (-\pi, \pi]$ קטע סגור.

(א) (13 נק') מצאו את טור פורייה של פונקציית האינדיקטור $\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b] \\ 0, & t \notin [a, b] \end{cases}$

עבור $t \in (-\pi, \pi]$, המומשכת ל- \mathbb{R} באופן -2π מחזורי.

(ב) (14 נק') חשבו את הקונבולוציה $f(x) = (\chi_{[0,\pi]} * \chi_{[0,\pi]})(x)$ במפורש.

עבור אילו $x \in \mathbb{R}$, טור פורייה של f ב- x מתכנס לערך הפונקציה $f(x)$? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4. נתבונן במרחב מטרי $\{f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ רציפה וחסומה}\}$ עם המטריקה האוניפורמית $d_\infty(f, g) = \sup |f - g|$.

(א) (14 נק') מצאו את הפנים $\text{int}(C_0)$ של $C_0 = \{f \in C_b: \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$.

(ב) (13 נק') האם C_0 סגורה? נמקו את תשובתכם.

