

# אוניברסיטת תל-אביב

## פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשפ"ה, מועד א'  
תאריך: 07.02.2025

### מבחן סוף סמסטר ב' חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2א'

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

#### הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובכל חומר עזר, פרט לדף הנוסחאות המצורף למבחן.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת/י" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה, אך לא יותר מ-5 נקודות על שאלה שלמה.
- יש לציין במדויק באיזה משפט או טענה אתם משתמשים.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אם משתמשים במשפטים שלא נלמדו בכיתה, יש להוכיח את המשפטים.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

**ב ה צ ל ח ה !**

כל הזכויות שמורות ©  
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

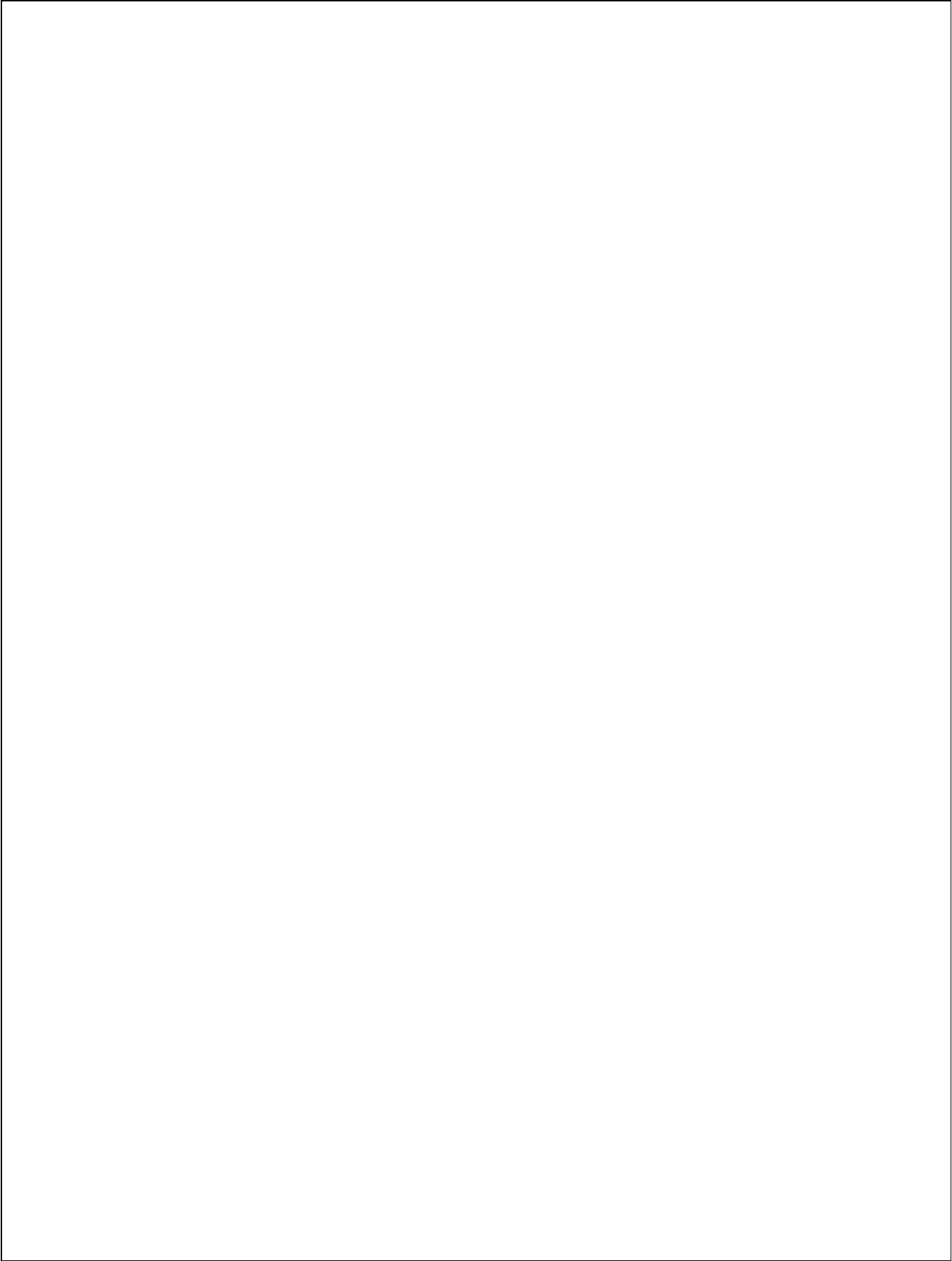
**שאלה 1.** (27 נק') הוכיחו את המשפט (מונוטוניות גוררת אינטגרביליות): תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  מונוטונית (עולה או יורדת). אזי  $f \in R([a, b])$ . הערה: הוכיחו לעולה ואז הסיקו מיד ליורדת.



**שאלה 2.** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה שנגזרתה  $f'$  רציפה במישור  $\mathbb{R}$ .

(א) (22 נק') הוכיחו ש-  $n \cdot \left( f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) \rightarrow f'(x)$  במישור  $\mathbb{R}$ .

(ב) (5 נק') הביאו דוגמה שמוכיחה שהדרישה על רציפות במישור של  $f'$  הכרחית.



**שאלה 3.** (א) (14 נק') הראו כי הפונקציה  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$  מוגדרת לכל  $x \in \mathbb{R}$  ורציפה ב- $(0, 2\pi)$ .

רמז: אם צריך, ניתן להשתמש בזהות לגרנזי,  $\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos((N+\frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}$ .

(ב) (13 נק') האם קיימת פונקציה  $g \in R(\mathbb{T})$  כך שטור פורייה שלה זה  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ? נמקו!



**שאלה 4.** נגדיר שתי קבוצות של סדרות ממשיות  $2^{\mathbb{N}} = \{a = (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j = 0 \text{ או } a_j = 1, \forall j \in \mathbb{N}\}$  ו- $d(a, a) = 0$  ומטריקה על הקבוצות  $X = \{a \in 2^{\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n = 0 \forall n \geq N\} \subset 2^{\mathbb{N}}$  ו- $d(a, b) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}}$  אם  $a \neq b$  (אין צורך לבדוק שזה אכן מטריקה).

(א) (10 נק') הוכיחו כי מרחב מטרי  $(2^{\mathbb{N}}, d)$  שלם.

(ב) (10 נק') הוכיחו כי מרחב מטרי  $(X, d)$  לא שלם.

(ג) (7 נק') הראו כי ההשלמה של  $(X, d)$  היא  $(2^{\mathbb{N}}, d)$ .

