

# אוניברסיטת תל-אביב

## פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ה, מועד א'  
תאריך: 17.07.2025

### מבחן סוף סמסטר ב' "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

#### הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובשום חומר עזר אחר.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה, אך לא יותר מ-5 נקודות על שאלה שלמה.
- יש לציין במדויק באיזה משפט או טענה אתם משתמשים.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אם משתמשים במשפטים שלא נלמדו בכיתה, יש להוכיח את המשפטים.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

**בהצלחה !**

כל הזכויות שמורות ©  
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

**שאלה 1.** בהינתן פונקציה  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  כאשר  $U \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה. נגדיר את הלפליסיאן

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

שלה בתור  $f$ -ש-הרמונית אם  $\Delta f = 0$  ב- $U$ .

(א) (7 נק') הוכיחו כי  $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ ,  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  היא הרמונית.

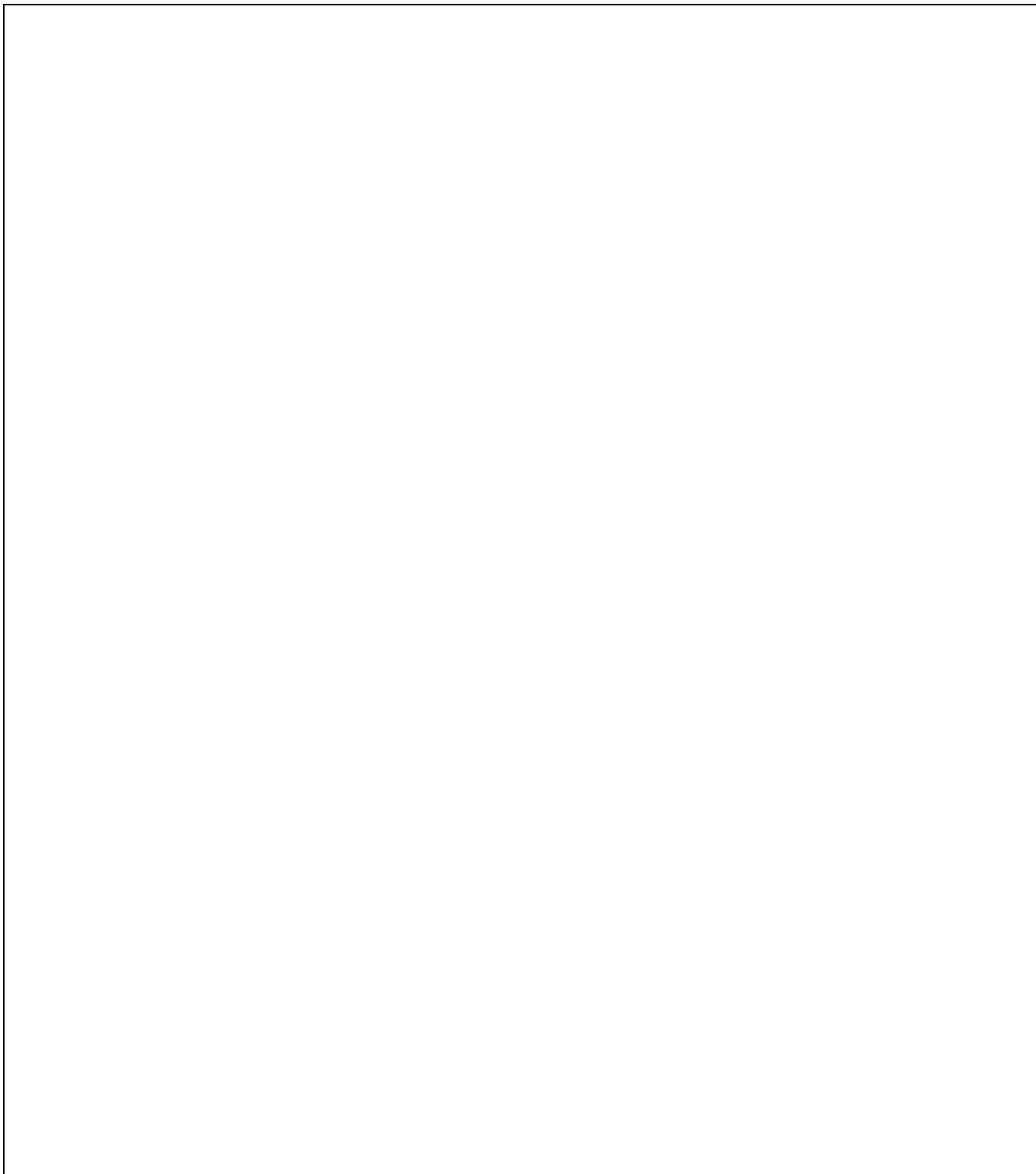
(ב) (10 נק') נניח כי  $u, v \in C^2(U, \mathbb{R})$  הרמוניות כך ש- $uv$  גם הרמונית. הוכיחו כי  $\nabla u \perp \nabla v$ .

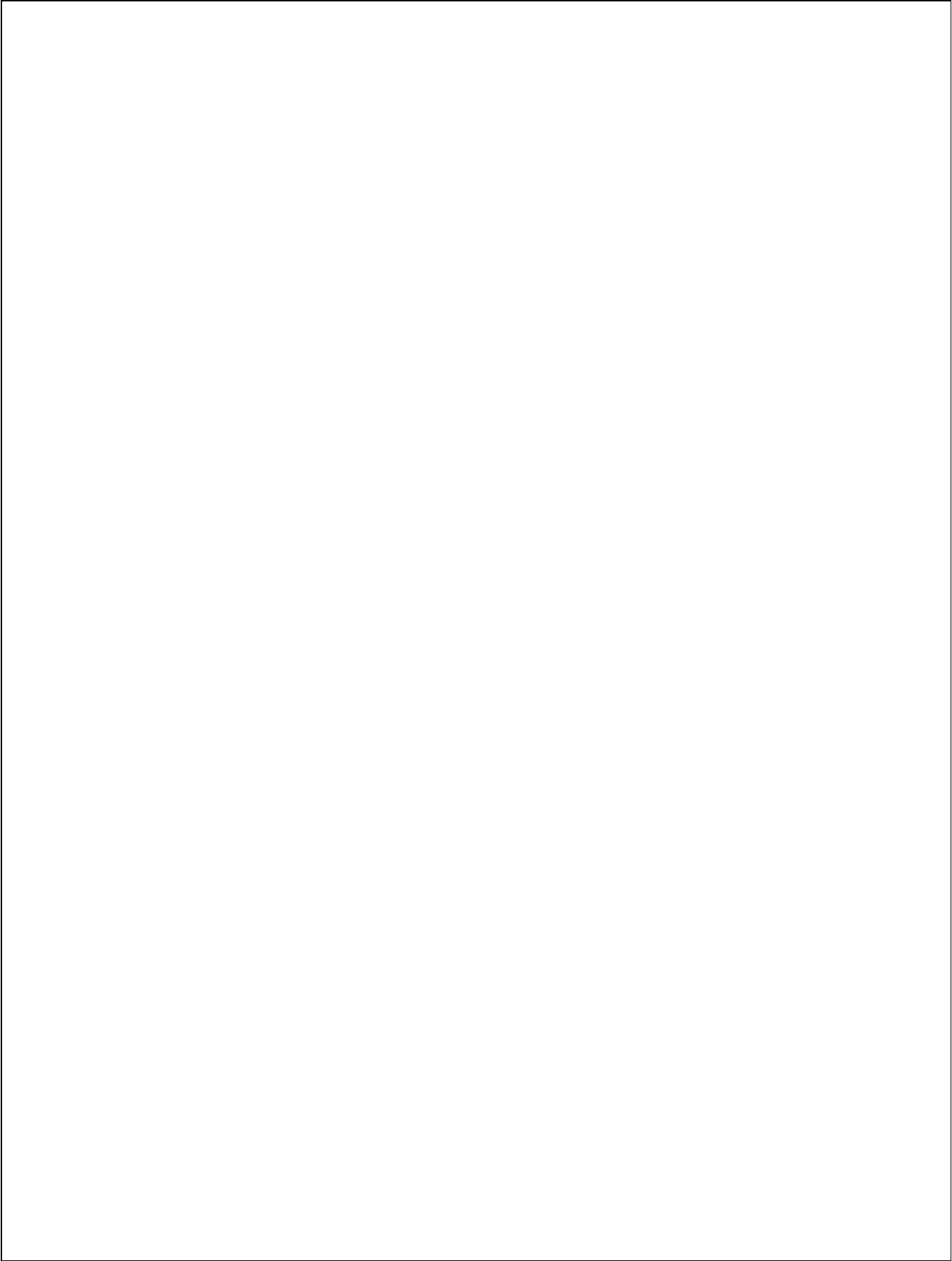
(ג) (10 נק') מצאו את כל הפונקציות  $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  כך שגם  $u$  וגם  $u^2$  הרמונית.



**שאלה 2. (א) (10 נק')** עבור פונקציה  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  כאשר  $U \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה, צטטו את המשפט על מיון נקודות קריטיות (קיצון מקומי או אוכף).

**(ב) (17 נק')** מצאו וסווגו את כל הנקודות הקריטיות (קיצון מקומי או אוכף) עבור  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + cyz$ .  $c \in \mathbb{R}$  כתלות בקבוע  $c \in \mathbb{R}$ .





**שאלה 3.** (א) (10 נק') עבור שתי קבוצות זיורדן חסומות  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$  ושתי פונקציות אינטגרביליות  $f \in R(A)$ ,  $g \in R(B)$  צטטו את משפט הפרדת משתנים עבור  $h = fg$ .  
(ב) (17 נק') חשבו את האינטגרל  $\int_C e^{x^2+y^2-z^2-w^2} dx dy dz dw$  כאשר  $C = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: x^2 + y^2 \leq 1, w^2 + z^2 \leq 1, z < w\}$ . מהו הנפח של  $C$ ?



**שאלה 4.** (א) (10 נק') בהינתן  $E \subset \mathbb{R}^n$  קבוצת זיורדן לא זניחה. הוכיחו כי קיימת תיבה  $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$  כך ש-  $Q_0 \subset E$  (אין להשתמש בקירוב ע"י תיבות מבפנים, כי זה מתבסס, קודם כל, על קיום התיבה).

(ב) (17 נק') יהיה  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x, y \geq 0, x^2 \leq y\}$ . בדקו עבור אילו ערכים של  $\alpha, \beta > 0$  האינטגרל הלא אמיתי הבא מתכנס:  $\int_E \frac{x^\alpha}{y^{\beta+1}} dx dy$ , כלומר הערך שלו הוא סופי.

