

אוניברסיטת תל-אביב פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר ב' תשפ"ה, מועד ב'
תאריך: 05.09.2025

מבחן סוף סמסטר ב' "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש במחשבון ובשום חומר עזר אחר.
- במבחן 4 שאלות. סך הנקודות במבחן הינו 108 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- אם אינכם יודעים לפתור שאלה או סעיף מסוים, נתונה לכם האפשרות, במקום לפתור את השאלה או את הסעיף, לסמן "אינני יודעת" (ולא לרשום שום דבר נוסף) ולקבל 20% (מעוגל למעלה) מערך הסעיף או השאלה, אך לא יותר מ-5 נקודות על שאלה שלמה.
- יש לציין במדויק באיזה משפט או טענה אתם משתמשים.
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- יחשבו תשובות שיכתבו על טופס המבחן בלבד. במידה הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף השאלון.
- אם משתמשים במשפטים שלא נלמדו בכיתה, יש להוכיח את המשפטים.

מספר שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	

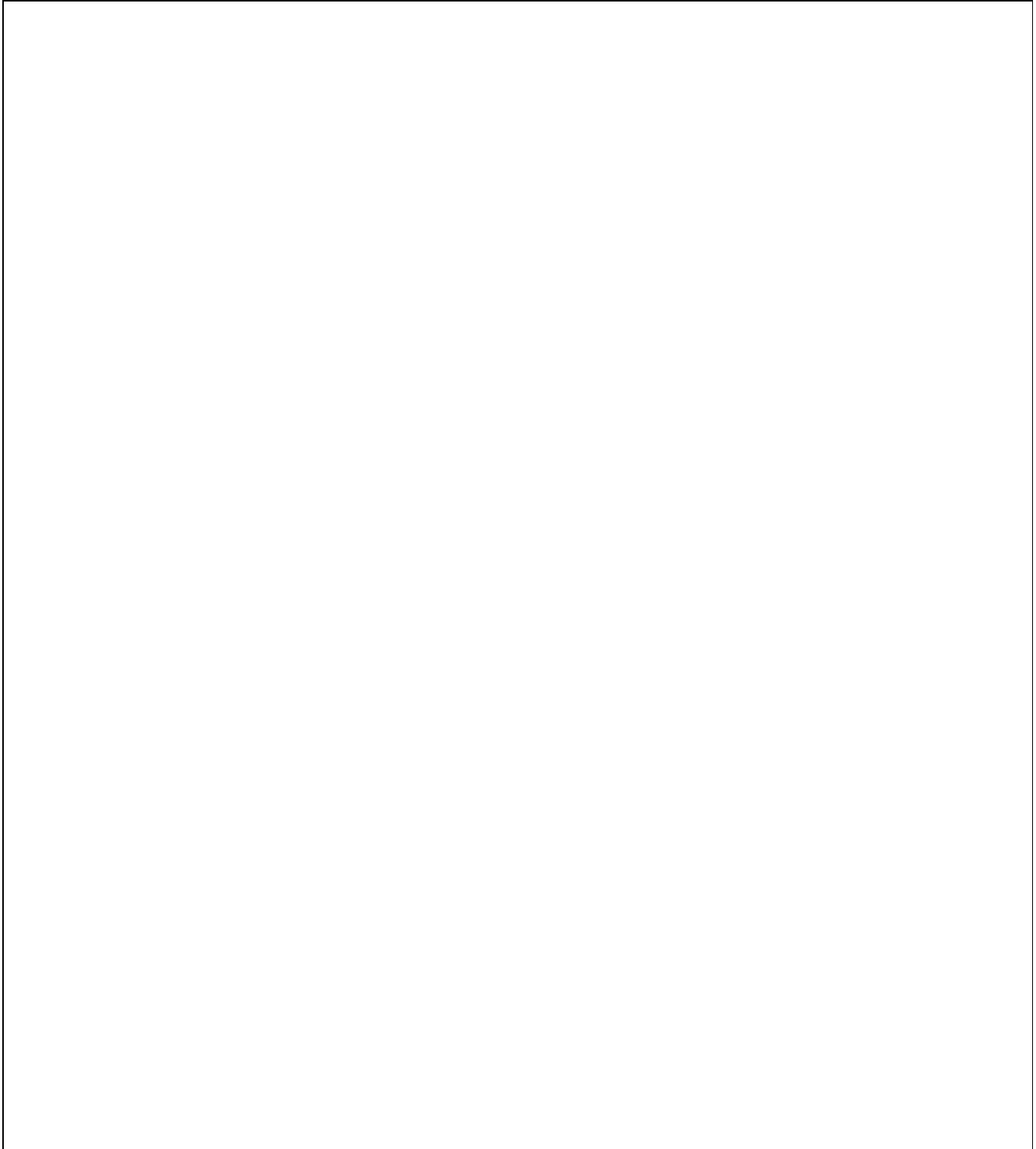
בהצלחה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדר, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

שאלה 1. (א) (10 נק') נתונה פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. כתבו את ההגדרה של דיפרנציאביליות של הפונקציה בנקודה $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

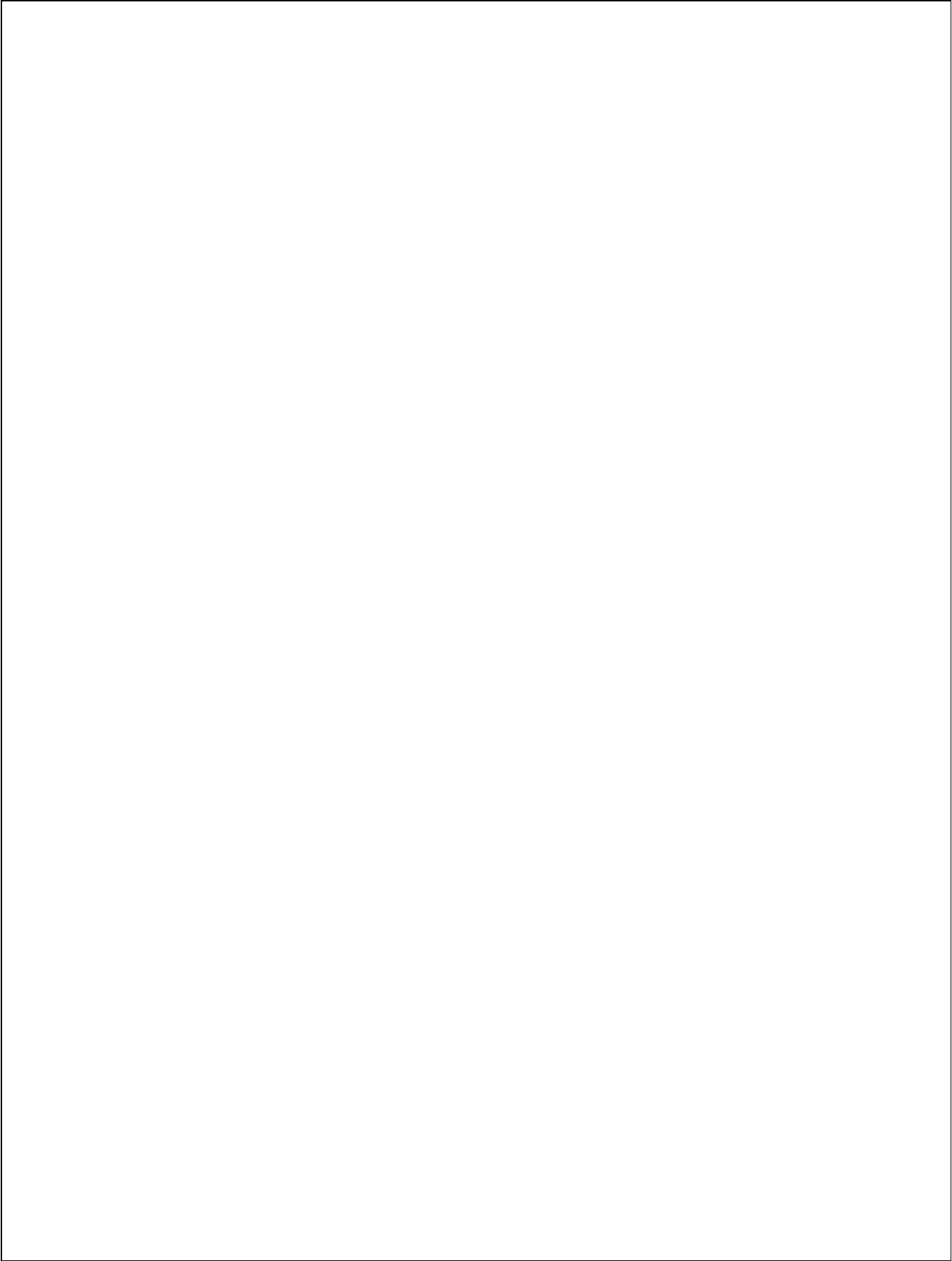
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(ax^2+by^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ c, & (x, y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{(ב) (17 נק') נגדיר}$$

מצאו עבור אילו ערכי a, b, c הפונקציה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.



שאלה 2. (א) (14 נק') מצאו את הנקודה הקרובה ביותר על הספרה $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ למישור $x + 3y + z = 4$ ב- \mathbb{R}^3 . רמז: המרחק בין נקודה (x_0, y_0, z_0) לבין מישור $ax + by + cz + d = 0$ שווה ל- $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

(ב) (13 נק') נתונה משוואה $xe^z + y^3z - z^2 = 0$. בדקו האם בסביבת הנקודה $(0,1,1)$ ב- \mathbb{R}^3 המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y . אם התשובה היא כן, חישבו את הדיפרנציאל $D_z(0,1)$.



שאלה 3. בהינתן קבוצת זיורדן חסומה $E \subset \mathbb{R}^2$ ו- $h > 0$. נגדיר את ה- h -מיתוח של E בתור הקבוצה

$$S_h(E) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z < h, \left(\frac{h}{h-z}x, \frac{h}{h-z}y \right) \in E \right\} \cup \{(0, 0, h)\}$$

ידוע כי $S_h(E)$ קבוצת זיורדן חסומה ב- \mathbb{R}^3 (אין צורך להוכיח זאת).

(א) (14 נק') נסמן $E_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (tx, ty) \in E\}$ עבור $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$. הוכיחו כי E_t

$$\text{Vol}(E_t) = \frac{1}{t^2} \text{Vol}(E)$$

קבוצת זיורדן חסומה והנפח

(ב) (13 נק') הוכיחו כי $\text{Vol}(S_h(E)) = \frac{1}{3} h \text{Vol}(E)$.

שאלה 4. (א) (10 נק') עבור קבוצת זיורדן $E \subset \mathbb{R}^n$ ופונקציה $f: E \rightarrow [0, \infty)$ ציטטו משפט על קיום מיצוי וחישוב אינטגרל הלא אמיתי $\int_E f$ דרך אינטגרלים לפי מיצוי.

(ב) (17 נק') נתון כי הפונקציה $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ מקיימת $\int_Q f = 0$ לכל תיבה $Q \subset \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי הפונקציה מקיימת את תנאי המשפט מסעיף (א) לכל קבוצת זיורדן לא חסומה $E \subset \mathbb{R}^n$ ומצאו $\int_E f$ דרך המשפט.

