

אוניברסיטת תל-אביב

הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בנושאים נבחרים במתמטיקה לסטטיסטיקאים

מועד א', סמסטר א' תשפ"ב 13.01.2022
פרופ' יעקב יעקובוב

אין להשתמש בכל חומר כתוב או מודפס פרט לשלושה דפי נוסחאות דו-צדדיים אישיים (כולל זהויות טריגונומטריות ואינטגרלים) בגודל A4 כתובים בכתב יד אישי או מודפסים. דף הנוסחאות יש לצרף למחברת בחינה. יש לענות על כל השאלות הבאות. סך כל הנקודות הוא 105, אך הציון המקסימלי שניתן לקבל הוא 100. אסורה אחזקה של טלפון סלולרי, מחשב כף יד או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה. משך הבחינה 3 שעות. אין להכניס בדפי נוסחאות תרגילים, פתרונות, שאלות מהמבחנים.

$$1. \text{ נתון אופרטור לינארי } T: l^2 \rightarrow l^2 : T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') הוכיחו כי $T \in B(l^2)$, כלומר האופרטור חסום מ- l^2 לתוך l^2 , וחשבו $\|T\| = \sup_{\|x\|_{l^2}=1} \|Tx\|_{l^2}$.

(ב) (10 נק') הוכיחו כי $\lambda = 0$ שייך לספקטרום שיעורי של האופרטור T .
(ג) (15 נק') הוכיחו כי $T^{-1}: l^2 \rightarrow l^2$ חסום ב- $D(T^{-1})$ וחשבו $\|T^{-1}\| = \sup_{\substack{x \in D(T^{-1}), \\ \|x\|_{l^2}=1}} \|T^{-1}x\|_{l^2}$.

2. (20 נק') נתון אופרטור לינארי $(Af)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$ ממרחב $L_q(a,b)$ לתוך מרחב $L_p(a,b)$, כאשר $1 < p, q < \infty$ ו- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. כמו כן, נתון כי $K(x,y) \in C([a,b] \times [a,b])$, כלומר פונקציה רציפה בריבוע $[a,b] \times [a,b]$ עם נורמה סופית $\|K\|_{C([a,b] \times [a,b])} = \max_{\substack{a \leq x \leq b, \\ a \leq y \leq b}} |K(x,y)|$.
הוכיחו כי האופרטור A חסום מ- $L_q(a,b)$ לתוך $L_p(a,b)$.
רמז: השתמשו באי-שוויון הולדר.

3. (א) (13 נק') נתונות שתי פונקציות $\{1, \cos(x)\}$ ב- $L_2(0,1)$. מצאו ההיטל $f_{hetel} = a \cdot 1 + b \cdot \cos(x)$ של פונקציה f מ- $L_2(0,1)$ על $Sp\{1, \cos(x)\}$, כלומר רשמו נוסחאות למקדמים a ו- b .

(ב) (12 נק') נתונה פונקציה $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$, כאשר $a > 0$ קבוע. חשבו טרנספורם פוריה $\hat{f}(\omega)$ וחשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(a\omega)}{\omega^2} d\omega$.

4. (25 נקודות) להוכיח שוויון פרסבל מוכלל: אם $f, g \in L_2(-\pi, \pi)$ ונתונים טורי פוריה מרוכבים $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$, $g \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(g) e^{inx}$ אז המכפלה הפנימית

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \overline{c_n(g)}$$

בהצלחה !!!