

אוניברסיטת תל-אביב הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בנושאים נבחרים במתמטיקה לסטטיסטיקאים

מועד ב', סמסטר א' תשפ"ב 10.02.2022
פרופ' יעקב יעקובוב

אין להשתמש בכל חומר כתוב או מודפס פרט לשלושה דפי נוסחאות דו-צדדיים אישיים (כולל זהויות טריגונומטריות ואינטגרלים) בגודל A4 כתובים בכתב יד אישי או מודפסים. דף הנוסחאות יש לצרף למחברת בחינה. יש לענות על כל השאלות הבאות. סך כל הנקודות הוא 105, אך הציון המקסימלי שניתן לקבל הוא 100. אסורה אחזקה של טלפון סלולרי, מחשב כף יד או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה. משך הבחינה 3 שעות. אין להכניס בדפי נוסחאות תרגילים, פתרונות, שאלות מהמבחנים.

1. נתון מרחב הילברט H וקבוצות האלמנטים M ו- N ב- H .

(א) (5 נק') הוכיחו כי אם $M \subset N$ אז $N^\perp \subset M^\perp$.

(ב) (5 נק') הוכיחו כי $M \subset (M^\perp)^\perp$.

(ג) (15 נק') הוכיחו כי $M^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{Sp\{M\}}|_H = H$.

רמז (לכיוון משמאל לימין): שוויון $\overline{Sp\{M\}}|_H = H$ אומר כי $\forall x \in H$ קיימת סדרת האלמנטים $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ב- $Sp\{M\}$ כך ש- $x_n \rightarrow x$ במובן H .

רמז (לכיוון מימין לשמאל): ברור כי $M \subset Sp\{M\} \subset \overline{Sp\{M\}}|_H$.

(ד) (10 נק') בדקו כי $(M^\perp)^\perp \subset M$ לא מתקיים עבור מרחב הילברט $H = L_2(0,1)$ ו- $M = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$.

2. (20 נק') נתון אופרטור לינארי A ממרחב נורמי לינארי X לתוך מרחב נורמי לינארי

Y . הוכיחו כי האופרטור A חסום אם ורק אם הוא מעביר כל קבוצה חסומה ב- X לקבוצה חסומה ב- Y .

3. (א) (12 נק') נתונה מטריצה סימטרית A מסדר $n \times n$. נסתכל באופרטור $\mathcal{A}$ ב- $\mathbb{R}^n$

הנתון ע"י $\mathcal{A}x = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי $\|\mathcal{A}\| = \max_{j=1, \dots, n} |\lambda_j|$, כאשר

$\lambda_j, j = 1, \dots, n$ הם ערכים עצמיים של מטריצה A .

(ב) (13 נק') הוכיחו כי לכל שני מספרים מרוכבים a ו- b מתקיים

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - a \sin(3x) - b \cos(4x)|^2 dx > 2\pi - \frac{2}{\pi}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \quad \text{כאשר}$$

4. (25 נקודות) הוכיחו כי אם $f, g \in L_1(-\infty, \infty)$ ו- f, g רציפות למקוטעין אז

$$\widehat{f * g}(\omega) = 2\pi \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$$

בהצלחה !!!