

אוניברסיטת תל-אביב הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בנושאים נבחרים במתמטיקה לסטטיסטיקאים

מועד א', סמסטר א' תשפ"ד 25.03.2024
פרופ' יעקב יעקובוב

אין להשתמש בכל חומר כתוב או מודפס פרט לשלושה דפי נוסחאות דו-צדדיים המצורפים לטופס המבחן. יש לענות על כל השאלות הבאות. סך כל הנקודות הוא 105, אך הציון המקסימלי שניתן לקבל הוא 100. אסורה אחזקה של טלפון סלולרי, מחשב כף יד או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה. משך הבחינה 3 שעות.

1. (25 נק') הוכיחו: אופרטור לינארי T ממרחב נורמי לינארי X למרחב נורמי לינארי Y רציף אם ורק אם הוא מעביר כל הסדרות המתכנסות ל-0 לסדרות חסומות.

2. (א) (14 נק') למצוא את ההיטל של פונקציה של $f \in L_2(0, \pi)$ על $sp\{x, \sin x\}$. לרשום גם במפורש את המקדמים a ו- b בפירוק $ax + b \sin x$ של ההיטל.

(ב) (11 נק') לחשב
$$\mu_0 = \min_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin^2 x + \alpha - \beta \cos x - \gamma \sin 4x|^2 dx$$

הערה: אפשר להשתמש בזהות טריגונומטרית המתאימה של $\sin^2 x$ לפי הצורך.

3. (א') (8 נק') נתונה פונקציה $f_a(x) = \begin{cases} 2, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$ לחשב טרנספורם פוריה $\hat{f}_a(\omega)$.

(ב') (7 נק') לחשב טרנספורם פוריה של פונקציה $xf_a(x)$, כאשר פונקציה $f_a(x)$ מסעיף א'.

(ג') (15 נק') בעזרת סעיף א' ומשפט פלנשרל לחשב $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\omega)\sin(b\omega)}{\omega^2} d\omega$ כאשר a ו- b הם קבועים חיוביים.

4. (25 נקודות) הוכיחו את המשפט: מרחב של מכפלה פנימית H הינו מרחב נורמי לינארי עם נורמה $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$.

בהצלחה !!!