

אוניברסיטת תל-אביב הפקולטה למדעים מדויקים

בחינה בנושאים נבחרים במתמטיקה לסטטיסטיקאים

מועד ב', סמסטר א' תשפ"ד 03.05.2024
פרופ' יעקב יעקובוב

אין להשתמש בכל חומר כתוב או מודפס פרט לשלושה דפי נוסחאות דו-צדדיים המצורפים לטופס המבחן. יש לענות על כל השאלות הבאות. סך כל הנקודות הוא 105, אך הציון המקסימלי שניתן לקבל הוא 100. אסורה אחזקה של טלפון סלולרי, מחשב כף יד או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה. משך הבחינה 3 שעות.

1. (25 נק') אם A אופרטור לינארי במרחב הילברט H ו- L תת-מרחב לינארי סגור של H כך ש- $A(L) \subset L$, אז L נקראת תת-מרחב אינווריאנטי של אופרטור A . ואם A גם חסום אז הוא נקרא צמוד לעצמו אם $(Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in H$. הוכיחו כי אם L הוא תת-מרחב אינווריאנטי של אופרטור צמוד לעצמו A , אז גם משלים אורתוגונלי $L^\perp$ גם הוא תת-מרחב אינווריאנטי של A .

2. (א) (14 נק') הוכיחו כי הנוסחה $\|f\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |(x^2 + 1)f(x)|$ מגדירה נורמה ב- $C[0,1]$.
הערה: בדקו את כל התכונות של נורמה, כלומר
(i) $\|f\| \geq 0$ ו- $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ב- $C[0,1]$;
(ii) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ לכל למבדה ממשי ולכל פונקציה מהמרחב;
(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ לכל שתי פונקציות מהמרחב.

(ב') (14 נק') האם אפשר להגדיר מכפלה סקלרית $(\cdot, \cdot)$ ב- $C[0,1]$ כך שנורמה

$\|f\|_{C[0,1]}$ מסעיף א' תהיה שווה ל- $(f, f)^{\frac{1}{2}}$? אם כן, הגדירו אותה, בדקו את

השוויון $(f, f)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{C[0,1]}$ (ובדקו את התכונות א-ד) של מכפלה סקלרית מדף הנוסחאות. אם לא, הוכיחו למה לא ניתן להגדיר מכפלה סקלרית כזאת.

3. (א') (13 נק') פיתחו את הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$ לטור פוריה מרוכב בקטע $[-\pi, \pi]$.

(ב') (14 נק') חישבו $\min \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - a - b \sin 3x - c \cos 3x|^2 dx$ כאשר a, b, c הם מספרים מרוכבים כלשהם והפונקציה מסעיף א'.

4. (25 נקודות) הוכיחו את הטענה הבאה: אם $f, g \in L_1(-\infty, \infty)$ אז מתקיים $\|f * g\|_{L_1(-\infty, \infty)} \leq \|f\|_{L_1(-\infty, \infty)} \|g\|_{L_1(-\infty, \infty)}$.

נזכיר כי קונבולוציה $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$.

בהצלחה !!!